गणित

कक्षा 10 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

आशा रानी सिंगल | महेन्द्र शंकर
बी. देवकीनंदन | मोहन लाल
जी.पी. दीक्षित | राम अवतार
ईश्वर चन्द्र | एस. के. श्रीवास्तव

संपादक

जी.पी. दीक्षित | राम अवतार
महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
अप्रैल 2003
चैत्र 1924

PD 210 T + 130 T RA

ISBN 81-7450-161-4

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस	108, 100 फीट रोड, होस्डेकेरे	नवजीवन ट्रस्ट भवन	सी.डब्लू.सी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग	हेली एक्सटेंशन बनाशंकरी III इस्टेज	डाकघर नवजीवन	निकट : धनकल बस स्टॉप
नई दिल्ली 110 016	बैंगलूर 560 085	अहमदाबाद 380 014	पनिहटी, कोलकाता 700 114

प्रकाशन सहयोग

संपादन : रेखा अग्रवाल
उत्पादन : अरुण चितकारा

रु 55.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित ।

प्रकाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा गीता कंप्यूट ग्राफिक्स द्वारा लेजर टाईपसैट होकर श्री इंडस्ट्रीज बी–116, सैक्टर-2, नौएडा (उ०प्र०) 201301 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एन.पी.ई.) 1986 में सामान्य शिक्षा के एक अभिन्न अंग के रूप में गणित के पठन-पाठन की आवश्यकता पर स्पष्ट रूप से बल दिया है। चूंकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत प्रक्रिया है, इसलिए प्रौद्योगिकी उन्मुख समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन होते रहे हैं। राष्ट्रव्यापी चर्चा एवं परामर्श के पश्चात्, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्चा की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई.-2000) का प्रकाशन किया। इसमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति, 1986 (1992 में संशोधित) में उपलब्ध मूल सिद्धांतों और निर्देशों पर पुन: बल दिया गया और विद्यालयी स्तर पर गणित से संबंधित अन्य मुद्दों को विस्तारपूर्वक बताया गया।

प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक, सन् 2002 में कक्षा 9 की प्रकाशित गणित की पाठ्यपुस्तक के अनुक्रम में है। यह पुस्तक एन.पी.ई., 1986 में दर्शाई गई अपेक्षाओं और एन.सी.एफ.एस.ई.-2000 में दिए गए सामान्य उद्देश्यों की पूर्ति हेतु लिखी गई है। इस पाठ्यपुस्तक में गणित को विद्यार्थियों के आस-पास के परिवेश से संबंधित क्रियाकलापों और प्रेरक उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत करने का प्रयत्न किया गया है।

नवीन पाठ्यक्रम के आधार पर दक्षताओं एवं अभिवृत्तियों को विकसित कर ज्ञान प्रदान करने के लिए, पुस्तक में सम्मिलित विषयवस्तु और सुझाए गए क्रियाकलापों को संयोजित किया गया है। पाठ्यसामग्री और सुझाए गए क्रियाकलापों को देश की व्यापक विद्यालयी पद्धतियों की विभिन्न आवश्यकताओं, पृष्ठभूमि और पर्यावरण के अनुकूल बनाने का एक सार्थक प्रयास किया गया है। विषयवस्तु को सरल भाषा में प्रस्तुत करने का विशेष ध्यान रखा गया है।

पुस्तक का प्रथम प्रारूप विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा विकसित किया गया जिन्हें अध्यापन और अनुसंधान का व्यापक अनुभव प्राप्त था। तत्पश्चात् एक समीक्षा कार्यशाला में इस प्रारूप की विषयवस्तु एवं उसके प्रस्तुतीकरण की विधि की पढ़ाने वाले शिक्षकों,

शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों द्वारा गहन रूप से समीक्षात्मक विवेचना की गई। समीक्षा कार्यशाला में प्राप्त टिप्पणियों और सुझावों पर लेखकों ने विचार किया और इस प्रारूप को उपयुक्त रूप से संशोधित कर अंतिम पाण्डुलिपि तैयार की।

लेखक दल ने गणित की पूर्व पाठ्यपुस्तक के प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुझावों एवं पुनर्निवेशन का उपयोग किया। प्रस्तुत पाठ्यपुस्तक को विकसित करने में, जहाँ उपयुक्त समझा गया, लेखक दल ने पूर्व प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों के संदर्भों का भी प्रयोग किया।

मैं लेखक दल के अध्यक्ष एवं उसके सदस्यों तथा समीक्षा हेतु कार्यशाला के शिक्षकों और विषय विशेषज्ञों को इस पुस्तक के निर्माण में दिए गए योगदान के लिए धन्यवाद देता हूँ।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक में और सुधार करने हेतु प्रयोक्ताओं से प्राप्त सुधारों का स्वागत करेगी।

जे.एस. राजपूत

निदेशक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली

फरवरी 2003

प्रस्तावना

औपचारिक शिक्षा के प्रारंभ से ही गणित विद्यालयी शिक्षा का एक अभिन्न अंग रहा है और इसने न केवल सभ्यता की उन्नति में बल्कि भौतिक विज्ञान और अन्य विषयों के विकास में भी प्रबल भूमिका निभाई है। चूंकि पाठ्यचर्या नवीनीकरण एक सतत प्रक्रिया है, इसलिए समाज की बदलती आवश्यकताओं के अनुरूप गणित पाठ्यचर्या में समय-समय पर विभिन्न प्रकार के परिवर्तन हुए हैं। माध्यमिक स्तर पर गणित पाठ्यचर्या में सुधार कर उसे समयानुकूल बनाने का वर्तमान प्रयास, प्रयोक्ता समूहों से पुनर्निवेशन, ज्ञान की नवीन विचारधारा के आविर्भाव और राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई. आर.टी.) द्वारा विस्तृत चर्चा के उपरांत नवंबर 2000 में प्रकाशित 'विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एन.सी.एफ.एस.ई.) में दिए गए पाठ्यचर्या संबंधी विभिन्न सरोकारों पर आधारित एक प्रयत्न है। इससे पहले 'पाठ्यचर्या रूपरेखा पर प्रारूप दस्तावेज़' तैयार किया गया था जिस पर शिक्षक-प्रशिक्षकों, विभिन्न परीक्षा बोर्डों से नामित व्यक्तियों, शिक्षा निदेशालयों और विभिन्न राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों की राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषदों (एस.सी.ई.आर.टी.) के प्रतिनिधियों, सामान्य जन और विश्वविद्यालयों, महाविद्यालयों और परिषद् के संकाय सदस्यों द्वारा विभिन्न स्तरों पर चर्चा की गई।

एन.सी.एफ.एस.ई. से माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण के संबंध में उभर कर आए कुछ सामान्य पाठ्यचर्या सरोकार इस प्रकार हैं :

- पाठ्यचर्या को सामाजिक परिवेश और व्यक्ति विशेष के जन्म से संबद्ध पूर्वाग्रहों को निष्प्रभावित करने तथा सार्वजनिक समभाव एवं समानता की जागरूकता का सृजन करने योग्य होना चाहिए।
- बालिका शिक्षा।
- पर्यावरण संरक्षण।
- स्वदेशीय ज्ञान और प्राचीन काल से अबतक विज्ञान और गणित में भारत के योगदान का समुचित समावेश।
- अप्रचलित और अनावश्यक विषयवस्तु को हटाकर पाठ्यचर्या के बोझ में कमी तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित के शिक्षण के लिए आवश्यक ज्ञान एवं पृष्ठभूमि प्रदान करना।

उपर्युक्त सरोकारों को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ने माध्यमिक स्तर हेतु गणित की पाठ्यपुस्तकों को विकसित करने के लिए एक लेखक दल गठित किया। लेखक दल ने गत वर्ष कक्षा 9 के लिए गणित की एक पाठ्यपुस्तक तैयार की। प्रस्तुत पुस्तक इसी पुस्तक की अगली कड़ी है। इस पुस्तक को तैयार करने में बहुत अधिक प्रयत्न किए गए हैं। सर्वप्रथम विभिन्न लेखकों द्वारा तैयार प्रारूप सामग्री पर दल के सदस्यों ने परस्पर चर्चा की और विभिन्न गोष्ठियों से प्राप्त टिप्पणियों और सुझावों के आधार पर उनमें संशोधन किया गया। इन चर्चाओं में, विद्यालयों में विषय को पढ़ाने वाले चार शिक्षकों, श्री पी.डी.चतुर्वेदी, श्री सुरेन्द्र पी.सचदेवा, श्रीमती चारु दुरेजा और श्रीमती झरना डे की भी आवश्यकतानुसार सहायता ली गई। तत्पश्चात् इस सामग्री को एक समीक्षा कार्यशाला में शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विशेषज्ञों के एक समूह के समक्ष रखा गया। पाण्डुलिपि को अंतिम रूप प्रदान करते समय लेखकों द्वारा समीक्षा कार्यशाला के सुझावों और टिप्पणियों को आवश्यकतानुसार सम्मिलित किया गया।

इस पाठ्यपुस्तक के कुछ प्रमुख बिंदु निम्नलिखित हैं :

- जहाँ तक संभव हो सका है, विचारों का प्रस्तुतीकरण सरलता से समझने योग्य शैली में किया गया है और नई संकल्पना का वास्तविक जीवन की स्थितियों के उदाहरणों से उपयुक्त अभिप्रेरण देकर परिचय देने का विशेष तौर पर ध्यान रखा गया है।
- पाठ्यपुस्तुक में अवधारणाओं का विस्तारपूर्वक वर्णन किया है तथा अधिक संख्या में हल किए हुए उदाहरण और प्रश्न सम्मिलित किए गए हैं, जो अभ्यास और अनुप्रयासों दोनों पर बल देते हैं। ऐसा सोच-समझकर किया गया है ताकि विद्यार्थी में अवधारणाओं को बेहतर ढंग से समझकर प्रश्नों को बेहतर ढंग से हल करने की दक्षता में वृद्धि की जा सके।
- ज्यामिति को कक्षा 9 की पाठ्पुस्तक की तरह ही पुनर्गठित किया गया है। अवधारणाओं को समझाने के लिए आकृतियों का अत्यधिक उपयोग किया गया है।
- गणितीय तथ्यों की पुनः खोज करने और आरेखण एवं मापन के लिए दक्षता के विकास हेतु अनेक क्रियाकलाप सुझाए गए हैं।
- राष्ट्रीय एकता, छोटे परिवार के मानदंडों का अनुपालन करने, लिंग भेदभाव मिटाने आदि की आवश्यकता पर जागरूकता विकसित करने के लिए कुछ शाब्दिक समस्याओं का समावेश किया गया है। विद्यार्थियों को इन शाब्दिक समस्याओं के

प्रमुख संदेश पहुँचने चाहिए तथा अध्यापकों को भी शिक्षण के समय इन तथ्यों के प्रति सचेत रहना चाहिए।

- पाठ्यपुस्तक में विद्यार्थियों के अवबोधन एवं परिपक्वता के स्तर के अनुरूप शब्दावली और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग किया गया है।
- विद्यार्थियों में स्वतंत्र रूप से सोचने की प्रेरणा उत्पन्न हो, इसके लिए कुछ प्रश्नों के लिए 'संकेत' दिए गए हैं। कुछ स्थानों पर 'क्यों' लगाया गया है, जिससे विद्यार्थियों को गणितीय सोच के प्रति प्रेरित किया जा सके और उनकी जिज्ञासा को बढ़ाया जा सके।
- यथोचित स्थानों पर विभिन्न विषयों के ऐतिहासिक संदर्भों, विशेषकर भारतीय योगदानों, का उल्लेख किया गया है।

मैं प्रो. जे. एस. राजपूत, निदेशक, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् का धन्यवाद करता हूँ जिन्होंने पाठ्यचर्या नवीनीकरण की इस परियोजना का शुभारंभ किया और गणित शिक्षा में सुधार हेतु इस राष्ट्रीय प्रयास में हमें सम्मिलित होने का अवसर प्रदान किया। मैं प्रो. आर.डी.शुक्ल, अध्यक्ष, विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग को भी इस कार्य में सहयोग देने के लिए धन्यवाद देता हूँ। लेखक दल के सभी सदस्य और समीक्षा कार्यशाला के सभी प्रतिभागी भी धन्यवाद के पात्र हैं।

किसी भी विषय पर कोई भी पुस्तक अंतिम नहीं हो सकती। हम यह समझते हैं कि पाठ्यपुस्तक में और अधिक सुधार हो सकता है। इस पाठ्यपुस्तक में और अधिक सुधार हेतु पाठकों के सुझावों / टिप्पणियों का स्वागत है।

जी.पी. दीक्षित

अध्यक्ष

लेखक दल

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

पाठ्यपुस्तक के हिन्दी संस्करण की समीक्षा संशोधन कार्यगोष्ठी के सदस्य

जी.पी. दीक्षित **(अध्यक्ष, लेखक दल)**
प्रोफेसर तथा *विभागाध्यक्ष*
गणित एवं खगोलिकी विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

आशा रानी सिंगल
प्रोफेसर (गणित) (सेवानिवृत्त)
ए-1, स्टाफ आवास
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ

अशोक कुमार गुप्ता
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय विद्यालय, जी पी ब्लाक,
पीतमपुरा, दिल्ली

बी. देवकीनंदन
प्रोफेसर एन.सी.ई.आर.टी. (सेवानिवृत्त)
सी-9/9167, पाकेट 9, सेक्टर सी
वसंत कुंज, नई दिल्ली

दिनेश कुमार शर्मा
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय विद्यालय, जे ब्लाक,
साकेत, नई दिल्ली

ईश्वर चन्द्र
प्रवक्ता (एस.जी.) एन.सी.ई.आर.टी.
(सेवानिवृत्त)
डब्ल्यू.जैड.-1427 डी,
नांगल राय, नई दिल्ली

जगमोहनी
वरिष्ठ प्रवक्ता (गणित)
एस.सी.ई.आर.टी.,
डिफेन्स कालोनी, नई दिल्ली

मुकेश कुमार अग्रवाल
टी जी टी (गणित)
राजकीय बाल सीनियर माध्यमिक विद्यालय
तुगलकाबाद, नई दिल्ली

मोहन लाल
अवैतनिक सलाहकार एवं *सचिव*
डी.ए.वी. कॉलेज प्रबंधक कमेटी,
चित्रगुप्त मार्ग, नई दिल्ली

नरेन्द्र मिश्र
रीडर (गणित)
एस.जे.एन.पी.जी. कॉलेज
लखनऊ

पी.के. तिवारी
सहायक आयुक्त (के.वी.एस.) (सेवानिवृत्त)
फ्लैट नं. ओ-460,
जलवायु विहार, सेक्टर 30, गुड़गांव

राज कुमार भारद्वाज
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय विद्यालय, मंगोलपुरी, दिल्ली

रणवीर सिंह
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय बाल विद्यालय नं. 1
सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

रविन्द्र सिंह पंवार
पी जी टी (गणित)
एम.बी.डी.ए.वी.
सीनियर माध्यमिक विद्यालय
युसुफ सराय, नई दिल्ली

एस.एन. चौरसिया
प्रोफेसर (गणित)
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान
इलाहाबाद

एस. के. श्रीवास्तव
प्रोफेसर (गणित) सागर विश्वविद्यालय
(सेवानिवृत्त),
प्रीति निकुंज,
10, सिविल लाइंस, सागर

सुधा गुप्ता
टी जी टी (गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय,
अवंतिका, सेक्टर 1,
रोहिणी, दिल्ली

वेद डुडेजा
उपप्रधानाचार्य
राजकीय बालिका माध्यमिक विदयालय,
सैनिक विहार, दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी.संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*

वी. पी. सिंह, *रीडर*

महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.)

राम अवतार, *रीडर* **(समन्वयक)**

हिंदी रूपांतर

आशा रानी सिंगल — ईश्वर चन्द्र
बी. देवकीनंदन — मोहन लाल
जी. पी. दीक्षित — नरेन्द्र मिश्र
एस.के. श्रीवास्तव

हिंदी संपादन

महेन्द्र शंकर — नरेन्द्र मिश्र
राम अवतार

पाठ्यपुस्तक की समीक्षा संशोधन कार्यगोष्ठी के सदस्य

जी.पी.दीक्षित **(अध्यक्ष, लेखक दल)**
प्रोफेसर और विभागाध्यक्ष,
गणित एवं खगोलिकी विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

आशा रानी सिंगल
प्रोफेसर (सेवानिवृत्त)
ए-1, स्टाफ आवास
चौधरी चरण सिंह विश्वविद्यालय, मेरठ

अशोक कुमार गुप्ता
टी जी टी(गणित)
सर्वोदय विद्यालय
जी.पी. ब्लॉक, पीतमपुरा, दिल्ली

बी. देवकीनंदन
प्रोफेसर,एन.सी.ई.आर.टी. (सेवानिवृत्त)
सी-9/9167, पॉकेट-9, सैक्टर सी
वसंत कुंज, नई दिल्ली

चारु दुरेजा
पी जी टी(गणित)
डी.ए.वी. पब्लिक स्कूल, सेक्टर-14
गुड़गांव

एच.एस. राघव
टी जी टी (गणित)
परमाणु ऊर्जा शिक्षा सोसायटी
अणुशक्ति नगर, मुम्बई

ईश्वर चंद्र
लेक्चरर(एस.जी.) एन.सी.ई.आर.टी.
(सेवानिवृत्त)
डब्ल्यू.जैड.-1427 डी
नांगलराय, नई दिल्ली

जगदीश सरन
प्रोफेसर,सांख्यिकी विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

जयदयाल भारद्वाज
प्रधानाचार्य
राजकीय उच्चतर माध्यमिक बाल विद्यालय
रेलवे कॉलोनी, तुगलकाबाद, नई दिल्ली

झरना डे
टी जी टी(गणित)
देव समाज मॉडर्न स्कूल
नेहरू नगर, नई दिल्ली

ज्योति कथूरिया
टी जी टी(गणित)
रायसीना बंगाली स्कूल
मंदिर मार्ग, नई दिल्ली

कुलदीप कुमार
टी जी टी (गणित)
सैनिक स्कूल, कपूरथला

मोहन लाल
अवैतनिकसलाहकार और *सचिव*
डी.ए.वी. कॉलेज प्रबंधक कमेटी
चित्रगुप्त रोड, नई दिल्ली

निर्मला गुप्तन
टी जी टी (गणित)
आवर लेडी ऑफ फातिमा माध्यमिक स्कूल
गुड़गांव

पी.डी. चतुर्वेदी
पी जी टी (गणित)
केंद्रीय विद्यालय
आर.के.पुरम, सेक्टर-2, नई दिल्ली

रामा बालाजी
टी जी टी(गणित)
केंद्रीय विद्यालय एम.ई.जी. और सेंटर
सेंट जॉन्स रोड, बंगलूर

रविन्द्र सिंह पवार
पी जी टी(गणित)
एम.बी.डी.ए.वी.
सीनियर माध्यमिक विद्यालय
युसुफ सराय, नई दिल्ली

शंकर मिश्र
टी जी टी (गणित)
डी.एम. स्कूल
क्षेत्रीय शिक्षा संस्थान, भुवनेश्वर

सुधा गुप्ता
टी जी टी(गणित)
सर्वोदय कन्या विद्यालय, अवन्तिका,
सेक्टर-1, रोहिणी, दिल्ली

सुनीला तलवार
टी जी टी(गणित)
स्प्रिंगडेल्स स्कूल
पूसा रोड, नई दिल्ली

सुनीता धारीवाल
टी जी टी(गणित)
नवयुग विद्यालय
सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

सुनीता तुलसानी
टी जी टी (गणित)
सैंट जोसफ कान्वेंट
सीनियर माध्यमिक विद्यालय, जबलपुर

एस. कृष्णामूर्थि
टी जी टी (गणित)
ब्लू बैल्स इंटरनेशनल स्कूल
कैलाश कॉलोनी, नई दिल्ली

सुरेंद्र सचदेव
पी जी टी(गणित)
दिल्ली पब्लिक स्कूल
वसंत कुंज, नई दिल्ली

एस.के. श्रीवास्तव
प्रोफेसर(गणित) सागर विश्वविद्यालय
(सेवानिवृत्त)
प्रीति निकुंज
10, सिविल लाइन्स, सागर

वी.ए. सुजाथा
टी जी टी(गणित)
केंद्रीय विद्यालय, डब्ल्यू. ए.पी. येलहंका
बंगलूर

वेद डुडेजा
उपप्रधानाचार्य
राजकीय बालिका माध्यमिक विद्यालय
सैनिक विहार
दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी.संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*
महेन्द्र शंकर, *लेक्चरर* (एस.जी.)
राम अवतार, *रीडर* **(समन्वयक)**

विषय सूची

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं,रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे; और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके।

अध्याय 1

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

1.1 भूमिका

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों से आप पहले ही से परिचित हैं। दो चरों x और y वाले रैखिक समीकरण का व्यापक रूप होता है :

$$ax + by + c = 0, a \neq 0, b \neq 0,$$

जहाँ a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं। ऐसे समीकरण के हल (solution) से हमारा तात्पर्य x और y के एक ऐसे मान-युग्म (pair of values) से होता है, जो समीकरण के दोनों पक्षों को बराबर कर दे। याद कीजिए कि दो चरों वाले प्रत्येक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक (infinitely many) हल होते हैं। ये सभी हल एक निश्चित रेखा के बिंदुओं से निरूपित होते हैं।

जबतक अन्यथा न कहा जाए, इस अध्याय में 'समीकरण' से हमारा तात्पर्य दो चरों वाले रैखिक समीकरण से होगा। बहुधा हम समान दो चरों वाले एक से अधिक समीकरणों का अध्ययन एक ही समय में करते हैं। ऐसा करने पर अध्ययन किए जा रहे समीकरणों को हम *समीकरण-निकाय* (*system of equations*) या *युगपत् समीकरण* (*simultaneous equations*) कहते हैं। उदाहरणतः,

$$2x - 3y + 4 = 0$$

और

$$x + 7y - 1 = 0$$

चरों x और y वाला दो समीकरणों का एक निकाय है।

हम अपने अध्ययन को दो चरों वाले समीकरण-युग्म तक ही सीमित रखेंगे। युग्म के प्रत्येक समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे। युग्म के सार्व (common) हल होने की स्थिति में, हम हल ज्ञात करने की अनेक विधियों पर विचार करेंगे।

1.2 दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेखीय हल : पुनरावृत्ति

याद कीजिए कि दो चरों वाले रैखिक समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए, हम दोनों चरों में से एक को कोई मान देकर दिए गए समीकरण से दूसरे चर का मान निकाल लेते हैं। इस प्रकार,

$$x - y + 5 = 0$$

में $x = 1$ लेकर, हम $y = 6$ प्राप्त कर लेते हैं। इससे हमें एक हल

$$x = 1, y = 6,$$

और कार्तीय (Cartesian) तल में एक बिंदु (1, 6) प्राप्त होता है।

दिए गए समीकरण के दो हल ज्ञात करने के पश्चात्, हम इनके संगत बिंदुओं, कहिए P और Q, को आलेखित करते हैं। इन बिंदुओं से होकर जाने वाली रेखा PQ दिए गए समीकरण से इस प्रकार जुड़ी हुई है :

1. दिए गए समीकरण का प्रत्येक हल $x = r, y = s$ एक बिंदु (r, s) निर्धारित करता है जो इस रेखा पर स्थित होता है।
2. रेखा PQ पर स्थित प्रत्येक बिंदु (m,n) से दिए गए समीकरण का एक हल $x = m$, $y = n$ प्राप्त होता है।

रेखा PQ, दिए गए समीकरण का *आलेख* (*graph*) कहलाती है। परिपाटी के अनुसार, हम कहते हैं कि रेखा PQ, दिए गए समीकरण को *निरूपित* (*represent*) करती है।

याद कीजिए :

1. समीकरण के दोनों पक्षों में किसी भी संख्या को, समीकरण और उसके हल को प्रभावित किए बिना, जोड़ा / घटाया जा सकता है।
2. समीकरण के दोनों पक्षों को किसी भी शून्येतर संख्या से, समीकरण और उसके हल को प्रभावित किए बिना, गुणा / भाग किया जा सकता है।

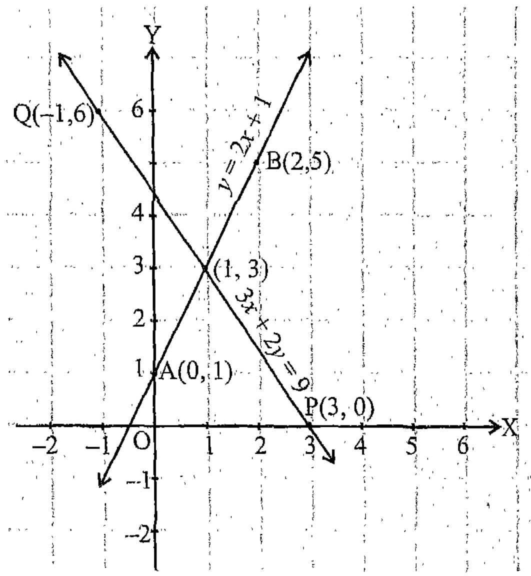
1.3 दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के युग्म का आलेखीय हल

अभी तक आपने दो चरों वाले एक समीकरण का अध्ययन किया। ऐसा समीकरण, दो राशियों के मध्य एक सरल संबंध को निरूपित करता है। उदाहरणतः, मान लीजिए कि एक संतरे का मूल्य दो केलों के मूल्य से एक रुपया अधिक है। मान लीजिए कि एक केले और एक संतरे के मूल्य रुपयों में, क्रमशः x और y हैं। तब

$$y = 2x + 1 \quad (1)$$

इस प्रकार, एक केले और एक संतरे के मूल्यों में संबंध दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण से प्राप्त होता है। समीकरण (1) के आलेख को, अर्थात् समीकरण (1) को निरूपित करने वाली रेखा AB को आकृति 1.1 में दिखाया गया है। AB को आलेखित करने के लिए निम्नलिखित हलों का प्रयोग किया गया है:

x	0	2
y	1	5



आकृति 1.1

दैनिक जीवन में हमें बहुधा दो राशियों के मध्य एक ऐसा संबंध देखने को मिल जाता है जिसे (1) जैसे किसी समीकरण से व्यक्त किया जा सकता है। पुन: व्यावहारिकता की दृष्टि से हमारी रुचि एक ही समय में ऐसे अनेक समीकरणों में हो सकती है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि ऊपर दिए गए उदाहरण में यह ज्ञात हो कि 3 केलों और 2 संतरों का कुल मूल्य 9 रु है। तब समीकरण (1) के अतिरिक्त, x और y के लिए निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करना भी अनिवार्य है :

$$3x + 2y = 9 \qquad (2)$$

समीकरण (2) के आलेख को, अर्थात् समीकरण (2) को निरूपित करने वाली रेखा PQ को भी आकृति 1.1 में दिखाया गया है। इस रेखा PQ के आलेखन हेतु निम्नलिखित हलों का प्रयोग किया गया है :

x	3	–1
y	0	6

याद कीजिए कि रेखा AB पर स्थित कोई बिंदु (a, b) हमें बताता है कि

यदि एक केले का मूल्य a रु और एक संतरे का मूल्य b रु हो,
तो एक संतरे का मूल्य दो केलों के मूल्य से एक रु अधिक होगा। (A)

इसी प्रकार, रेखा PQ पर स्थित कोई बिंदु (p, q) हमें यह बताता है कि

यदि एक केले का मूल्य p रु और एक संतरे का मूल्य q रु हो,
तो 3 केलों और 2 संतरों का कुल मूल्य 9 रु होगा। (B)

इस स्थिति में यह अनिवार्य हो जाता है कि प्रतिबंध (A) और (B) *युगपत् रूप से* संतुष्ट हों। दूसरे शब्दों में, हमें मूल्यों का एक ऐसा युग्म (x, y) चाहिए कि समीकरण (1) और (2) युगपत् रूप से संतुष्ट हो जाएँ। इस प्रकार, हमें एक ऐसे बिंदु (m,n) की खोज है जो दोनों ही रेखाओं, AB और PQ, पर स्थित हो। इसके लिए आवश्यक है कि

$$x = m, \quad y = n$$

समीकरण (1) का हल हो और साथ ही समीकरण (2) का भी। अर्थात् $x = m, y = n$ समीकरणों (1) और (2) का *सार्व हल (common solution)* होना चाहिए।

आकृति 1.1 में हम देखते हैं कि बिंदु (1, 3) रेखाओं AB और PQ, दोनों पर स्थित है। तात्पर्य यह कि

$$x = 1, \quad y = 3$$

समीकरणों (1) और (2), दोनों का हल है। अतः यदि हम एक केले का मूल्य 1 रु और एक संतरे का मूल्य 3 रु मानकर चलें, तो

एक संतरे का मूल्य दो केलों के मूल्य से 1 रु अधिक होगा।

और साथ ही

3 केलों और 2 संतरों का कुल मूल्य 9 रु होगा।

दो या दो से अधिक समीकरणों के सार्व हल ज्ञात करना बीजगणित की एक महत्त्वपूर्ण प्रक्रिया है। यह इसलिए कि इससे अनेकानेक व्यावहारिक समस्याओं को हल करने में सहायता मिलती है। स्पष्टतया

दो (या अधिक) समीकरणों के सार्व हल से हमारा तात्पर्य ऐसे मान-युग्म से होता है (एक मान x का और दूसरा y का) जो दोनों (सभी) समीकरणों को युगपत् रूप से संतुष्ट करे।

विचाराधीन समीकरणों को *समीकरण-निकाय* कहा जाता है। सार्व हल ज्ञात करने की प्रक्रिया को *समीकरण-निकाय को हल करना* कहा जाता है।

दिए गए दो समीकरणों का हल कैसे ज्ञात करते हैं, यह समझने के लिए एक उदाहरण लेते हैं। आइए, निम्नलिखित समीकरणों का सार्व हल निकालें :

$$x - y = 0 \quad (1)$$

और $$x + y = 2 \quad (2)$$

अब (1) और (2), दोनों में से प्रत्येक के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। हमें एक हल

$$x = x_0,\ y = y_0$$

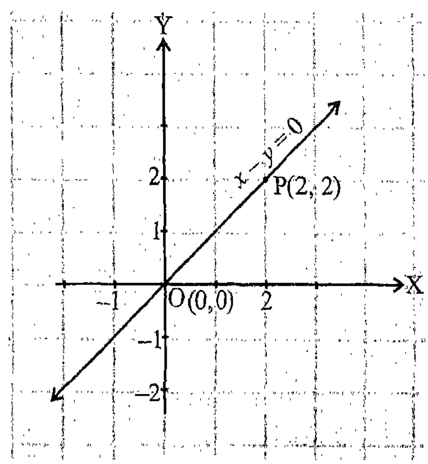
ऐसा ज्ञात करना है जो (1) और (2) दोनों को संतुष्ट करे, अगर ऐसा कोई हल वास्तव में हो तो।

यदि हम समीकरण (1) के कोई दो हल ज्ञात कर लें, तो इसका आलेख खींचकर हम इसके समस्त हलों का अनुमान कर सकते हैं। हम देख सकते हैं कि

$$x = 0, y = 0 \text{ और } x = 2, y = 2$$

समीकरण (1) के दो हल हैं। अब बिंदुओं O (0, 0) और P (2, 2) को आलेखित कर इनमें से होकर जाने वाली रेखा OP खींचते हैं (आकृति 1.2)।

रेखा OP के प्रत्येक बिंदु से समीकरण (1) का एक हल प्राप्त होता है। उदाहरणतः, बिंदु (3, 3) रेखा OP पर स्थित है। सत्यापित कीजिए कि $x = 3, y = 3$ समीकरण (1) का हल है। (–1, –1) भी OP पर स्थित है और हम देख सकते हैं कि $x = -1, y = -1$ भी (1) का हल है। अब प्रश्न यह है कि (1) *के अपरिमित रूप से अनेक हलों में से यदि समीकरण* (2) *का भी कोई हल है, तो वह कौन-सा है ?*



आकृति 1.2

यह तो स्पष्ट है कि (1) के प्रत्येक हल के लिए यह जाँच नहीं की जा सकती कि वह (2) का भी हल है अथवा नहीं। अतः हमें कोई अन्य व्यावहारिक विचार प्रयोग में लाना होगा। एक उत्तम विचार यह होगा कि हम एक ही कार्तीय तल में एक ही अक्षों पर दोनों समीकरणों के आलेख खींच लें। इस स्थिति में,

सार्व हल यदि हुआ (हुए), तो तत्काल ज्ञात हो जाएगा (जाएँगे)। चलिए समीकरण (2) के कोई दो हल ज्ञात किए जाएँ।

समीकरण (2) के दो हल नीचे की सारणी में दिए गए हैं :

x	2	0
y	0	2

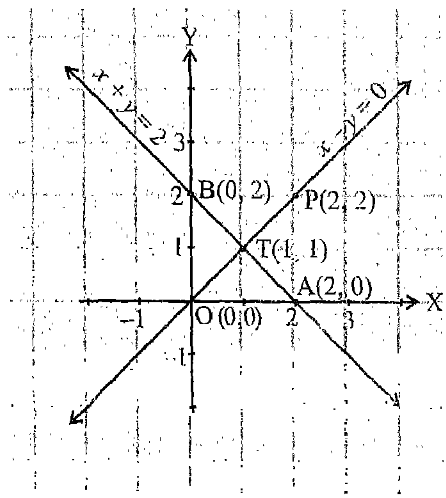
आकृति 1.2 के आलेख में ही बिंदुओं A(2, 0) और B(0, 2) को आलेखित कर आकृति 1.3 प्राप्त की गई है। ध्यान दीजिए कि जिस प्रकार रेखा OP के प्रत्येक बिंदु से समीकरण (1) का एक हल प्राप्त होता है, ठीक उसी प्रकार रेखा AB के प्रत्येक बिंदु से समीकरण (2) का एक हल प्राप्त होता है। बिंदु T(1, 1), जो रेखाओं OP और AB का सार्व बिंदु है, के विषय में क्या विचार है? क्योंकि T रेखा OP पर स्थित है, अतः

$x = 1$ और $y = 1$

समीकरण (1) का हल है। क्योंकि T, AB पर भी स्थित है, अतः

$x =1$ और $y = 1$

समीकरण (2) का भी हल है। इस प्रकार, समीकरणों (1) और (2) का एक सार्व हल प्राप्त हो जाता है। इस तथ्य को हम इन शब्दों में व्यक्त करते हैं कि $x = 1, y =1$ समीकरण-निकाय



आकृति 1.3

$$x - y = 0$$

और $$x + y = 2$$

का हल है।

एक सार्व हल निकालने के बाद अब यह देखा जाए कि क्या कोई और सार्व हल भी है। ध्यान दीजिए कि यदि $x = a, y = b$ कोई सार्व हल हो, तो बिंदु (a,b) रेखाओं OP और AB दोनों पर स्थित होगा क्योंकि दी गई दो भिन्न रेखाएँ अधिक-से-अधिक एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं, अतः कोई अन्य सार्व हल नहीं है।

आइए, जो कुछ अभी सीखा है उसका संक्षेप में पुन: कथन करें। दो दिए गए समीकरणों का सार्व हल प्राप्त करने के लिए, हम निम्नलिखित प्रक्रम का अनुसरण करते हैं :

1. दोनों में से प्रत्येक समीकरण के दो हल ज्ञात कर, इन हलों के संगत बिंदुओं को आलेखित कर, दिए गए समीकरणों को निरूपित करने वाले बिंदुओं को मिलाकर प्राप्त होने वाली रेखाओं को खींचना।

2. रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से अद्वितीय सार्व हल प्राप्त करना [रेखाएँ यदि समांतर अथवा संपाती (coincident) न हों]।

उदाहरण 1: समीकरण – युग्म

$$2x + 3y = 6 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 24 \qquad (2)$$

का सार्व हल, यदि कोई है, ज्ञात कीजिए।

हल : सार्व हल ज्ञात करने की दिशा में प्रथम चरण यह होगा कि दिए गए समीकरणों के दो-दो हल प्राप्त किए जाएँ जिससे कि इन्हें निरूपित करने वाली रेखाएँ आलेखित की जा सकें। याद कीजिए कि हल ज्ञात करने के लिए, हम दोनों में से किसी भी एक चर को प्राय: मान $0, \pm 1, \pm 2$ आदि देकर दूसरे चर का मान निश्चित कर लेते हैं। इस प्रकार, हम दो सुविधाजनक (पूर्णांक) हल प्राप्त करते हैं। ऐसा करने पर, हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होते हैं :

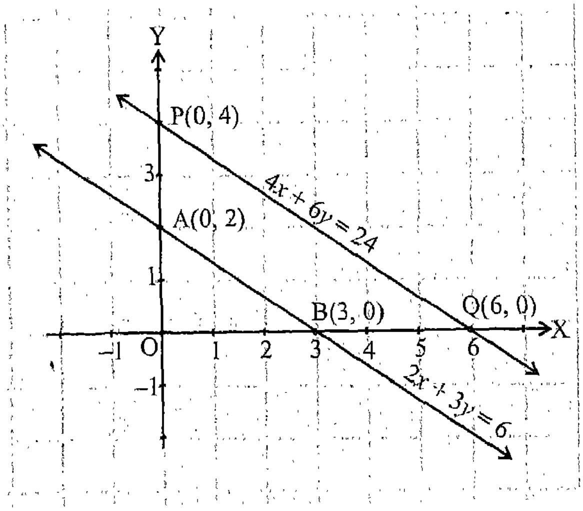
समीकरण (1) :

x	0	3
y	2	0

समीकरण (2) :

x	0	6
y	4	0

बिंदुओं A(0, 2) और B(3, 0) को आलेखित कर हम समीकरण (1) को निरूपित करने वाली रेखा AB प्राप्त करते हैं (आकृति 1.4)। इसी प्रकार, हम P(0, 4) और Q (6, 0) से होकर जाने वाली रेखा PQ प्राप्त करते हैं जो समीकरण (2) को निरूपित करती है।



आकृति 1.4

सार्व हल ज्ञात करने के लिए हमें इन दो रेखाओं का सार्व बिंदु, अर्थात् प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करना होगा। किन्तु रेखाएँ AB और PQ समांतर हैं और इसलिए यह किसी भी बिंदु पर मिलती नहीं हैं। अत: हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि समीकरणों (1) और (2) का कोई सार्व हल नहीं है।

अब निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित रेखाओं पर विचार कीजिए :

$$x + y = 3 \qquad (3)$$

$$7x + 7y = 21 \qquad (4)$$

इस बार जब हम समीकरणों को आलेखित करने का प्रयास करते हैं, तो हमें वही रेखा प्राप्त होती है, अर्थात् यहाँ रेखाएँ संपाती हैं। अत: कितने बिंदु सार्व हुए? निश्चित रूप से, प्रत्येक बिंदु एक सार्व बिंदु है। अत: रेखा के प्रत्येक बिंदु से एक सार्व हल प्राप्त होता है। इस प्रकार, समीकरण निकाय (3) और (4) के अपरिमित रूप से अनेक सार्व हल हैं।

अब हम दो चरों वाले दो समीकरणों के निकाय को निरूपित करने वाली रेखाओं के व्यवहार और सार्व हलों के होने–न–होने का सार-संक्षेप इस प्रकार कर सकते हैं :

A. रेखाएँ केवल एक बिंदु में प्रतिच्छेद करें।
इस स्थिति में, *समीकरणों का एक अद्‌वितीय सार्व हल होगा।*

B. रेखाएँ समांतर हों।
इस स्थिति में, *समीकरणों का कोई सार्व हल नहीं होगा।*

C. रेखाएँ संपाती हों।
इस स्थिति में, *समीकरणों के अपरिमित रूप से अनेक सार्व हल होंगे।*

टिप्पणी : सार्व हल ज्ञात करने में हमारी रुचि प्रायः व्यावहारिक कारणों से होती है। अतः मुख्य रूप से हमारी रुचि स्थिति A में होगी जहाँ समीकरणों का एक अद्‌वितीय हल होता है।

उदाहरण 2 : समीकरण-निकाय

$$5x - y - 7 = 0 \quad (1)$$

और

$$x - y + 1 = 0 \quad (2)$$

को आलेखीय विधि से हल कीजिए।

हल : आइए, समीकरणों (1) और (2) को आलेखित करें। ऐसा करने के लिए, हम दोनों समीकरणों के दो-दो हल ज्ञात करते हैं।

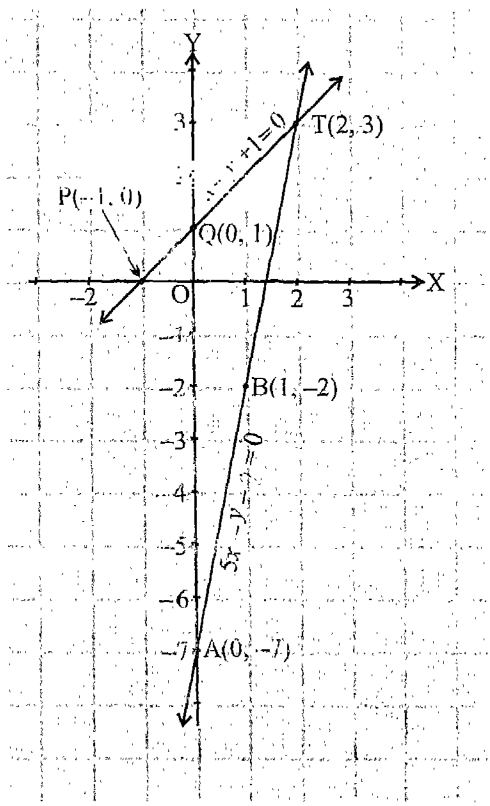
$5x - y - 7 = 0$:

x	0	1
y	-7	-2

$x - y + 1 = 0$:

x	-1	0
y	0	1

अब बिंदुओं A(0,–7) और B(1, –2) को आलेखित करते हैं। बिंदुओं (0, –7) और (1, –2) से होकर जाने वाली रेखा AB, समीकरण (1) को निरूपित करती है। इसी प्रकार, बिंदुओं P (–1, 0) और Q (0, 1) से होकर जाने वाली रेखा PQ, समीकरण (2) को निरूपित करती है (आकृति 1.5)।



आकृति 1.5

अब रेखा AB के प्रत्येक बिंदु से हमें समीकरण (1) का एक हल प्राप्त होता है। रेखा PQ के प्रत्येक बिंदु से समीकरण (2) का एक हल प्राप्त होता है। हम देखते हैं कि बिंदु T (2, 3) रेखाओं AB और PQ, दोनों पर ही स्थित है। अत: इस बिंदु से हमें समीकरणों (1) और (2), दोनों का ही हल प्राप्त हो जाता है। अत:, समीकरणों (1) और (2) का हल हुआ :

$$x = 2 \text{ और } y = 3$$

जाँच : $x=2$ और $y=3$ लेने पर समीकरण (1) और (2), दोनों संतुष्ट हो जाते हैं। अतः हल का सत्यापन हुआ।

टिप्पणियाँ :

1. यदि आप आलेखीय विधि का प्रयोग करें, तो हल का सत्यापन अनिवार्य होगा।
2. पूर्णांकों वाले हल खोजने का प्रयास करें, जिससे कि बिंदु ठीक स्थान पर आलेखित किए जा सकें।

उदाहरण 3 : यह दिखाइए कि निम्नलिखित समीकरण-निकाय का कोई हल नहीं है :

$$2x + 3y - 1 = 0 \tag{1}$$

$$x + \frac{3}{2}y - 2 = 0 \tag{2}$$

हल : क्योंकि हमें यह दिखाना है कि निकाय का 'कोई हल नहीं' है, इसलिए संभावना है कि दिए गए समीकरण समांतर रेखाओं को निरूपित करते हैं। आइए हम आलेख खींचकर ज्ञात करें। निम्नलिखित सारणियों में समीकरणों (1) और (2) के दो-दो हल सारणीबद्ध हैं :

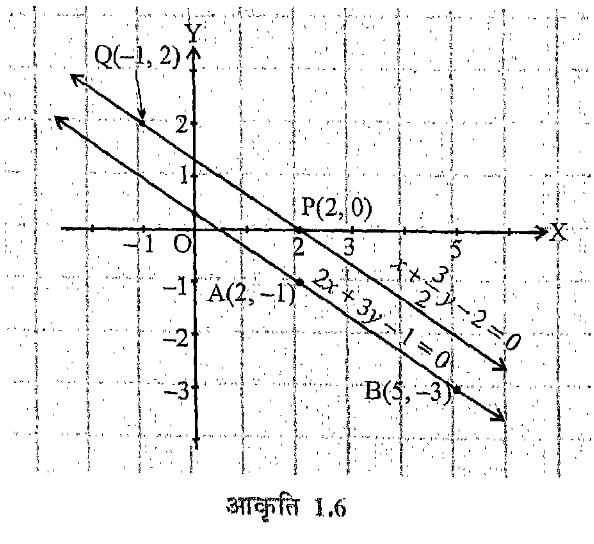
$2x + 3y - 1 = 0$:

x	2	5
y	–1	–3

$x + \frac{3}{2}y - 2 = 0$:

x	2	–1
y	0	2

बिंदुओं A(2, –1) और B (5, –3) को आलेखित कर रेखा AB खींचिए। यह समीकरण (1) को निरूपित करती है। बिंदुओं P(2, 0) और Q(–1, 2) को आलेखित कर रेखा PQ खींचिए। यह समीकरण (2) को निरूपित करती है। यह देखा जा सकता है कि AB और PQ समांतर रेखाएँ हैं। क्योंकि AB और PQ प्रतिच्छेद नहीं करतीं (आकृति 1.6), इसलिए इनमें कोई सार्व बिंदु नहीं है। अतः दिए गए निकाय का कोई हल नहीं है।



आकृति 1.6

टिप्पणी : किसी समीकरण-निकाय को हल करने से तात्पर्य यह है कि यदि निकाय के समीकरणों का कोई अद्‌वितीय हल हो, तो उसे निकालना, अन्यथा यह बताना कि इन समीकरणों का कोई सार्व हल नहीं है या कि इनके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित समीकरण-निकाय के अभिन्न हल (यदि हैं, तो) ज्ञात कीजिए :

$$9x - 7y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$2x - \frac{14}{9}y + \frac{2}{9} = 0 \qquad (2)$$

हल : समीकरण (2) को $\frac{9}{2}$ से गुणा कर पुनः इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$9x - 7y + 1 = 0$$

किंतु यह तो समीकरण (1) ही है। अतः समीकरणों (1) और (2) से निरूपित होने वाली रेखाएँ संपाती हैं। इस प्रकार, समीकरणों (1) और (2) के सभी हल सार्व हल हैं। अतः निकाय के अपरिमित रूप से अनेक अभिन्न हल हैं। दूसरे शब्दों में, निकाय के समीकरणों, अर्थात् समीकरणों (1) और (2) के अपरिमित रूप से अनेक अभिन्न हल हैं।

उदाहरण 5 : समीकरणों

$$2x - y = -8 \qquad (1)$$

और

$$8x + 3y = 24 \qquad (2)$$

को आलेखित कीजिए। x–अक्ष के साथ इन समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाएँ जो त्रिभुज बनाती हैं उसके शीर्ष ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुजाकार क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

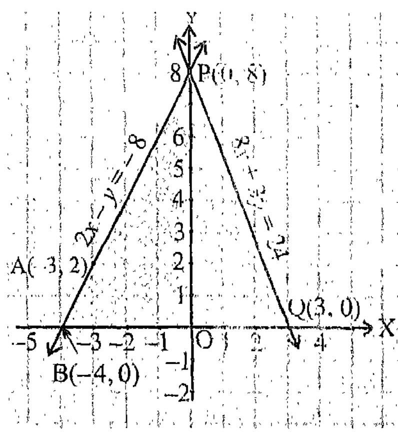
हल : नीचे, दिए गए प्रत्येक समीकरण के दो-दो हल सारणीबद्ध हैं :

$2x - y = -8$:

x	-3	-4
y	2	0

$8x + 3y = 24$:

x	0	3
y	8	0



आकृति 1.7

सदा की भाँति बिंदुओं A(–3, 2) और B(–4, 0) को आलेखित कर समीकरण (1) को निरूपित करने वाली रेखा AB प्राप्त होती है (आकृति 1.7)। बिंदुओं P (0, 8)

और Q(3, 0) को आलेखित कर समीकरण (2) को निरूपित करने वाली रेखा PQ प्राप्त होती है।

अब

1. AB और PQ बिंदु P(0, 8) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

2. AB, x– अक्ष को B(– 4, 0) पर काटती है।

3. PQ, x– अक्ष को Q(3, 0) पर काटती है।

इस प्रकार, त्रिभुज के शीर्ष (0, 8), (– 4, 0) और (3, 0) हैं। अभीष्ट छायांकित क्षेत्र आकृति 1.7 में दिखाया गया है।

प्रश्नावली 1.1

निम्नलिखित समीकरण-निकायों में से जिनके अद्‌वितीय हल हैं, उन्हें आलेखीय विधि से हल कीजिए। शेष के लिए यह बताइए कि हल है ही नहीं अथवा कि अपरिमित रूप से अनेक हल हैं :

1. $x - 4y + 14 = 0$
$3x + 2y - 14 = 0$

2. $x + y = 3$
$2x + 5y = 12$

3. $3x - 5y + 1 = 0$
$2x - y + 3 = 0$

4. $2x + 7y = 14$
$5x + \frac{35}{2}y = 25$

5. $3x + 2y = 8$
$2x - 3y = 1$

6. $4x + 6y = 9$
$2x + 3y = -11$

7. $x - 2y = 5$
$2x - 4y - 10 = 0$

8. $2x - 3y = 5$
$3x + 4y + 1 = 0$

9. निम्नलिखित समीकरणों के आलेख खींचिए :

$4x - y = 4$

और $4x + y = 12$

इन समीकरणों द्‌वारा निरूपित रेखाएँ x– अक्ष के साथ जो त्रिभुज बनाती हैं उसके शीर्ष ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुजाकार क्षेत्र को छायांकित कीजिए।

10. निम्नलिखित समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाओं से बने त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए :

$x + y = 5$, $x - y = 5$ और $x = 0$।

1.4 किसी समीकरण-निकाय का बीजीय हल

पिछले अनुच्छेद में, हमने दो चरों वाले दो रैखिक समीकरणों को आलेखीय विधि से हल करना सीखा है। यह तो सत्य है कि प्रत्येक *आलेखित* दृश्य (*visual*) वस्तु में अपना एक आकर्षण होता है, किन्तु जैसा कि हमने देखा, समीकरणों को हल करने के संदर्भ में तो यह बहुधा जाँच-और-भूल (trial and error) विधि बनकर रह जाती है।

अभीष्ट रेखाएँ खींचने के लिए पूर्णांक मानों वाले हल खोजना एक कठिन कार्य होता है। हलों को पूर्णांक न लेने का मूल्य संगत बिंदुओं के आलेखन के समय परिशुद्धता और यथार्थता की हानि के रूप में चुकाना पड़ता है। उस स्थिति में भी, जब हम अलग-अलग समीकरणों के पूर्णांक मानों वाले हल खोज पाते हैं, प्रतिच्छेद बिंदु $\left(\frac{7}{11}, \frac{11}{13}\right)$ जैसा हो सकता है। अब यह तो आप मानेंगे ही कि ग्राफ कागज पर आलेखित ऐसे बिंदु के निर्देशांक ठीक-ठीक पढ़ पाना संभव न होगा।

आलेखीय विधि की ऐसी कठिनाइयों से बचने के लिए, अब हम दो ऐसी बीजीय विधियों पर विचार करेंगे जो शुद्ध हल भी देंगी और हमें न तो अनुमान लगाने पर विवश करेंगी और न ही जाँच-और-भूल विधि पर हमें निर्भर रखेंगी।

1.4.1 विलोपन या निराकरण विधि (प्रतिस्थापन द्वारा)

एक चर वाले रैखिक समीकरण को हल करना आप जानते हैं। मान लीजिए कि दो चरों x और y वाले दो रैखिक समीकरणों में से हम पहले पर विचार करें और x को चर न मानकर इसे अचर मान लें। तब हम इस समीकरण को एक चर y वाले समीकरण के रूप में देख सकेंगे, और y के लिए इसे हल कर सकेंगे। हाँ, यह ठीक है कि इस प्रकार प्राप्त y के मान में x उपस्थित होगा।

उदाहरण के लिए, हम निम्न समीकरण-निकाय पर विचार करते हैं :

$$2x - y = 3 \qquad (1)$$

और

$$4x - y = 5 \qquad (2)$$

x को अचर मानते हुए, समीकरण (1) को y के लिए हल करने पर,

$$y = 2x - 3 \qquad (3)$$

प्राप्त होता है। अब (3) से प्राप्त y के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$4x - (2x - 3) = 5 \qquad (4)$$

अब (2) में से y का निराकरण हो गया है। परिणाम में प्राप्त समीकरण (4) अकेले x में

समीकरण है। (4) को सरल करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$2x + 3 = 5$$

या $$x = 1$$

x का यह मान (1) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2 - y = 3$$

या $$y = -1$$

इस प्रकार, दिए गए समीकरण-निकाय का हल है :

$$x = 1 \text{ और } y = -1$$

टिप्पणियाँ :

1. आप जाँच सकते हैं कि $x = 1$, $y = -1$ दिए गए समीकरणों को संतुष्ट करते हैं।
2. समीकरण (3) वही है जो समीकरण (1) (पुनर्लिखित) है। अतः x का मान प्राप्त करने के बाद, y का मान प्राप्त करने के लिए हम सीधे समीकरण (3) में, $x = 1$ प्रतिस्थापित कर सकते थे।

किसी समीकरण-निकाय को हल करने की यह विधि *प्रतिस्थापन द्वारा विलोपन या निराकरण* (*elimination*) करने की विधि कहलाती है। 'निराकरण' इसलिए कि y को विलुप्त किया गया है, अर्थात् समीकरण (2) में से y का निराकरण किया गया; और 'प्रतिस्थापन' इसलिए कि हमने y का मान दूसरे समीकरण में रखा, अर्थात् प्रतिस्थापित किया है।

उदाहरण 6 : प्रतिस्थापन द्वारा निराकरण की विधि से निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

$$3x + 2y = 14 \quad (1)$$

$$-x + 4y = 7 \quad (2)$$

हल : x के मान को एक समीकरण से दूसरे में प्रतिस्थापित कर हम x का निराकरण कर देंगे। हम देखते हैं कि समीकरण (2) में x का गुणांक -1 है। आइए, (2) को पुनः निम्न रूप में लिखें :

$$x = 4y - 7 \quad (3)$$

अब x को y के पदों में व्यक्त कर दिया गया है। चलिए, (3) से x के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित कर दें। ऐसा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$3\,(4y - 7) + 2y = 14 \quad (4)$$

अब (4), y में एक रैखिक समीकरण है, क्योंकि x का निराकरण हो गया है। (4) को सरल करने पर, प्राप्त होता है :

$$14y - 21 = 14$$

या $$14y = 35$$

या $$y = \frac{5}{2}$$

y के इस मान को (3) में प्रतिस्थापित करने पर, प्राप्त होता है :

$$x = 4y - 7$$

$$= 4 \times \frac{5}{2} - 7 = 3$$

इस प्रकार, निकाय का एक हल है :

$$x = 3 \text{ और } y = \frac{5}{2}$$

सत्यापन : $x = 3$ और $y = \frac{5}{2}$ रखने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं। अत: हल सही है।

1.4.2 निराकरण विधि (गुणांकों को बराबर कर)

एक चर के निराकरण की एक अन्य विधि है जो कभी-कभी ऊपर वाली विधि से अधिक सुविधाजनक रहती है। मान लीजिए कि हमें

$$23x - 17y + 11 = 0 \quad (1)$$

और $$31x + 13y - 57 = 0 \quad (2)$$

को हल करना है। यदि x को y के पदों में व्यक्त करना चाहें, तो 23 या 31 से भाग करना होगा। y को x के पदों में व्यक्त करने के लिए 17 या 13 से भाग करना होगा। क्योंकि ऐसी संख्याओं से भाग देने की अपेक्षा गुणा करना अधिक सुविधाजनक है, हम भाग की क्रिया को गुणा की क्रिया में बदलेंगे। पहले समीकरण को 13, अर्थात् (2) में y के संख्यात्मक गुणांक से गुणा कर, तथा दूसरे समीकरण को 17, अर्थात् (1) में y के संख्यात्मक गुणांक से गुणा कर, हम दिए गए समीकरण-निकाय के तुल्य एक समीकरण-निकाय प्राप्त करते हैं।

इस नए समीकरण-निकाय का लाभ यह है कि इसके दोनों समीकरणों में y का संख्यात्मक गुणांक वही है। इन नए समीकरणों को जोड़ने पर y वाले पद निरस्त हो जाएँगे, क्योंकि इनके

संख्यात्मक गुणांक समान और विपरीत चिह्नों के हैं (यदि इनके चिह्न समान होते, तो हम एक समीकरण को दूसरे में से घटा देते)। इस प्रकार, y का निराकरण हो जाएगा। अब हम शेष क्रिया पूर्व की भाँति कर, निकाय को हल कर सकते हैं। स्पष्ट कारणों से, निराकरण की इस विधि को *गुणांकों को बराबर कर निराकरण करने की विधि* कहते हैं।

उदाहरण 7 : निराकरण की गुणांकों को बराबर करने की विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

$$11x - 5y + 61 = 0 \quad (1)$$

और

$$3x - 20y - 2 = 0 \quad (2)$$

हल : समीकरण (1) को 3 से और समीकरण (2) को 11 से गुणा करने पर,

$$33x - 15y + 183 = 0 \quad (3)$$

और

$$33x - 220y - 22 = 0 \quad (4)$$

(4) को (3) में से घटाने पर,

$$205\,y + 205 = 0$$

या

$$y = -1$$

प्राप्त होता है। y के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, प्राप्त होता है :

$$3x - 20 \times (-1) - 2 = 0$$

या

$$3x = -18$$

या

$$x = -6$$

इस प्रकार, अभीष्ट हल है :

$$x = -6 \text{ और } y = -1$$

सत्यापन : $x = -6$ और $y = -1$ रखने पर दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं। अत: हल सही है।

टिप्पणी : यदि हम प्रत्येक समीकरण को दूसरे समीकरण में x के गुणांक से गुणा कर दें और इस प्रकार प्राप्त समीकरणों में से एक को दूसरे में से घटा दें, तो x का निराकरण हो जाएगा। अब यदि y का मान ज्ञात कर, इस मान को किसी एक समीकरण में प्रतिस्थापित कर दें, तो x का मान ज्ञात कर सकते हैं। किन्तु दिए गए समीकरणों पर निर्भर करते हुए, कोई सरलतर विधि भी हो सकती है। यहाँ हम समीकरण (1) को 4 से गुणा कर, प्राप्त समीकरण को समीकरण (2) में से घटा सकते थे। ऐसा करने पर y का निराकरण हो जाता और हल ज्ञात करना सरल हो जाता। जब-जब संभव हो, ऐसी श्रम-निवारक युक्तियों का प्रयोग करना चाहिए।

प्रश्नावली 1.2

निम्नलिखित प्रत्येक समीकरण-निकाय को x का निराकरण (प्रतिस्थापन द्वारा) कर, हल कीजिए :

1. $x + y = 7$, $2x - 3y = 11$

2. $x + y = 7$, $12x + 5y = 7$

3. $2x - 7y = 1$, $4x + 3y = 15$

4. $3x - 5y = 1$, $5x + 2y = 19$

5. $5x + 8y = 9$, $2x + 3y = 4$

निम्नलिखित समीकरण-निकायों को (प्रतिस्थापन द्वारा) y का निराकरण कर, हल कीजिए :

6. $3x - y = 3$, $7x + 2y = 20$

7. $7x + 11y - 3 = 0$, $8x + y - 15 = 0$

8. $3x + 4y - 7 = 0$, $2x + y + 2 = 0$

9. $2x + 7y - 11 = 0$, $3x - y - 5 = 0$

10. $2x + y - 17 = 0$, $17x - 11y - 8 = 0$

x अथवा y के गुणांकों को बराबर कर, निराकरण विधि से निम्नलिखित समीकरण-निकायों को हल कीजिए :

11. $x - 5y = 11$, $2x + 3y = -4$

12. $4x - 3y - 8 = 0$, $6x - y - \frac{29}{3} = 0$

13. $7x - 8y - 11 = 0$, $8x - 7y - 7 = 0$

14. $3x + 5y = 7$, $11x - 13y = 9$

15. $3x + 2y = \frac{11}{3}$, $-7x + 5y = \frac{31}{3}$

निम्नलिखित समीकरण-निकायों को हल कीजिए :

16. $2x - y = 11$, $5x + 4y = 1$

17. $-6x + 5y = 2$, $-5x + 6y = 9$

18. $4x + 7y = 20$, $21x - 13y = 21$

19. $2x + 3y = 0$, $3x + 4y = 5$

20. $23x - 17y + 11 = 0$, $31x + 13y - 57 = 0$

21. $\frac{15}{u} + \frac{2}{v} = 17$, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{36}{5}$

[**संकेतः** $\frac{1}{u} = x, \frac{1}{v} = y$ लिखिए।]

22. $\frac{11}{v} - \frac{7}{u} = 1$

$\frac{9}{v} - \frac{4}{u} = 6$

23. निम्नलिखित समीकरणों का ऐसा हल ज्ञात कीजिए कि $u \neq 0, v \neq 0$ हो :

$$2u + v = \frac{7}{3}\, uv, \quad u + 3v = \frac{11}{3}\, uv$$

[**संकेत :** दोनों पक्षों को uv से भाग दीजिए।]

1.5 वज्र-गुणन द्वारा रैखिक समीकरणों के निकाय का हल

रैखिक समीकरणों के निकाय को प्रतिस्थापन द्वारा निराकरण कर हल करने की बीजीय विधि उसी स्थिति में प्रभावी रहती है जब निकाय का एक अद्वितीय हल हो। अब रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की एक अन्य ऐसी बीजीय विधि का वर्णन किया जाएगा जो सभी स्थितियों में प्रयोग के योग्य है। इस विधि से यह पहले ही ज्ञात हो जाता है कि निकाय का एक अद्वितीय हल है या हल है ही नहीं, या फिर इसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

निम्नलिखित दो समीकरणों पर विचार कीजिए :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,\ a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, \qquad (1)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,\ a_2 \neq 0, b_2 \neq 0 \qquad (2)$$

जहाँ कि गुणांक वास्तविक संख्याएँ हैं। हम प्रतिस्थापन द्वारा y का निराकरण करते हैं। समीकरण (1) से,

$$y = -\frac{1}{b_1}(c_1 + a_1 x) \qquad [b_1 \neq 0 \text{ दिया है}]$$

y के इस मान को (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$a_2 x + b_2\left[-\frac{1}{b_1}(c_1 + a_1 x)\right] + c_2 = 0$$

या $$a_2 x - \frac{b_2 c_1}{b_1} - \frac{b_2 a_1 x}{b_1} + c_2 = 0$$

या $$\left(a_2 - \frac{b_2 a_1}{b_1}\right)x + \left(-\frac{b_2 c_1}{b_1} + c_2\right) = 0$$

या $$(b_1 a_2 - b_2 a_1)x + (-b_2 c_1 + b_1 c_2) = 0$$

[दोनों पक्षों को शून्येतर संख्या b_1 से गुणा करने पर]

या $$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = b_1 c_2 - b_2 c_1 \tag{3}$$

इसी प्रकार, x का निराकरण करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, y = c_1 a_2 - c_2 a_1 \tag{4}$$

अब (3) और (4) को देखिए, जिनमें से प्रत्येक एक चर वाला रैखिक समीकरण है (एक x में और दूसरा y में)। इन्हें देखकर यह इच्छा होनी स्वाभाविक है कि इन्हें $a_1 b_2 - a_2 b_1$ से विभाजित कर, x और y के मान प्राप्त कर लिए जाएँ। परंतु यहाँ एक चेतावनी सामयिक होगी। विभाजन केवल शून्येतर संख्या से ही किया जा सकता है। इसलिए हम इन दो स्थितियों में विभेद करेंगे :

स्थिति I : $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$।

इस स्थिति में, (3) और (4) को $a_1 b_2 - a_2 b_1$ से भाग देने पर, हमें x तथा y के ये मान प्राप्त होते हैं :

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

और $$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

हम इन संबंधों को पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{5}$$

और $$\frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{6}$$

क्योंकि (5) और (6) के दाएँ पक्ष एक से हैं, इसलिए हमें प्राप्त हुआ :

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \tag{7}$$

इस प्रकार, स्थिति I में x और y के मान, (7) को सूत्र मानकर प्राप्त किए जा सकते हैं। आरंभ में, सूत्र (7) को स्मरण कर लिखने के लिए आगे बताई गई युक्ति का प्रयोग किया जा सकता है। (बाद में, अभ्यास से आप यह संबंध अपनी विधि से स्वयमेव बिना सोच-विचार के लिखने में समर्थ हो जाएँगे।)

दी हुई समीकरणों को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$a_1 . x + b_1 . y + c_1 .1 = 0$$

और

$$a_2 . x + b_2 . y + c_2 .1 = 0$$

अब

a_1, a_2 को x के गुणांकों के रूप में देखिए,

b_1, b_2 को y के गुणांकों के रूप में देखिए,

c_1, c_2 को 1 के गुणांकों के रूप में देखिए

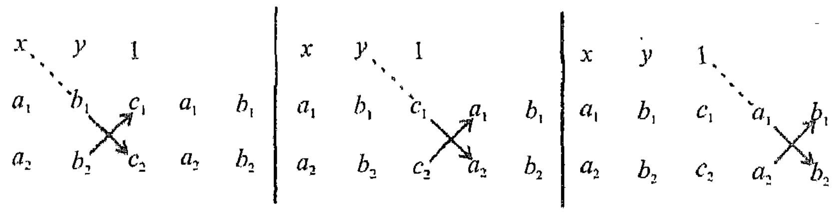
और निम्न प्रकार लिखिए :

$$\begin{matrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

गुणांकों के पहले दो स्तंभों को अंत में जोड़कर,

$$\begin{matrix} x & y & 1 & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{matrix}$$

प्राप्त कीजिए। अब नीचे दिखाए अनुसार तीर खींचिए :



(x का हर) आकृति 1.8 (a)

(y का हर) आकृति 1.8 (b)

(1 का हर) आकृति 1.8 (c)

प्रत्येक स्थिति में, अधोमुखी तीर (↘) धन चिह्न वाला पद और ऊर्ध्वमुखी तीर (↗) ऋण चिह्न वाले पद को दर्शाता है। इस प्रकार,

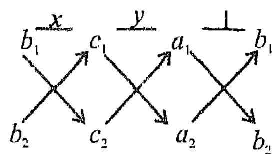
$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \quad \Bigg| \quad \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} \quad \Bigg| \quad \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

प्राप्त होता है। अब समानता चिह्न लगाते ही, हमें निम्न संबंध प्राप्त हो जाते हैं :

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

क्योंकि हर, गुणांकों के *वज्र-गुणन* (*cross multiplication*) से प्राप्त किए गए हैं, इसलिए रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की यह विधि *वज्र-गुणन की विधि* कहलाती है।

एक बार जब ऊपर की युक्ति ठीक से समझ ली जाए, तो आकृतियों 1.8 (a) — 1.8 (c) को इस प्रकार एकीकृत किया जा सकता है :



आकृति 1.9

चेतावनी : संबंधों (7) का प्रयोग सावधानी से करना चाहिए। बहुधा समीकरण

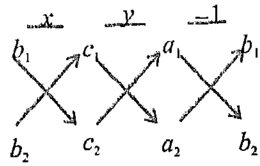
$$\left.\begin{aligned} & a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \text{और} \quad & a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

के रूप में न होकर,

$$\left.\begin{aligned} & a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \text{और} \quad & a_2 x + b_2 y = c_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B)}$$

के रूप में दिए जाते हैं। यदि समीकरण रूप (A) में न लिखे जाकर रूप (B) में लिखे गए हों,

तो आकृति 1.9 को निम्नलिखित आकृति में परिवर्तित करना होगा :

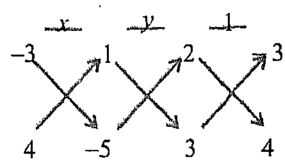


आकृति 1.10

उदाहरण 8 : निम्नलिखित समीकरण-निकाय को हल कीजिए :

$$2x - 3y + 1 = 0$$
$$3x + 4y - 5 = 0$$

हल : आकृति 1.9 को देखिए। हम y के गुणांकों (b_1, b_2) से लिखना आरंभ कर, अचर पद (c_1, c_2) लिखते हैं, और फिर x के गुणांक (a_1, a_2), और फिर अंत में पुनः y के गुणांक (b_1, b_2) लिखते हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है (आकृति 1.11) :



आकृति 1.11

संबंधों (7) के अनुसार लिखने पर, हमें निम्न मान प्राप्त होंगे :

$$\frac{x}{(-3)\times(-5)-4\times1} = \frac{y}{1\times3-(-5)\times2} = \frac{1}{2\times4-3\times(-3)}$$

या $$\frac{x}{15-4} = \frac{y}{3-(-10)} = \frac{1}{8-(-9)}$$

या $$\frac{x}{11} = \frac{y}{13} = \frac{1}{17}$$

$\therefore$ $$x = \frac{11}{17} \text{ और } y = \frac{13}{17}$$

आप सत्यापित कर सकते हैं कि x और y के ये मान, दिए गए समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। अतः हल सही है।

स्थिति II : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$।

इस स्थिति में, x और y के मान प्राप्त करने के लिए, हम समीकरणों (3) और (4) को $a_1 b_2 - a_2 b_1$ से विभाजित नहीं कर सकते। यदि

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

तो $\quad a_1b_2 = a_2b_1$

या $\quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ [क्योंकि $a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$]

माना कि $\quad \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$ है $(k \neq 0)$।

तब $\quad a_1 = k\, a_2$ और $b_1 = k\, b_2$ होगा।

अब दो संभावनाएँ हैं :

संभावना 1: $c_1 = k\, c_2$

इस दशा में, समीकरण (1) बन जाता है :

$$ka_2x + kb_2y + kc_2 = 0 \qquad \text{[क्योंकि } a_1 = ka_2,\ b_1 = ka_2 \text{ और } c_1 = kc_2]$$

या $\quad k(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

या $\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$ [क्योंकि $k \neq 0$]

जो और कुछ नहीं, समीकरण (2) ही है। इस प्रकार, प्रत्येक समीकरण का कोई भी हल दूसरे समीकरण का भी हल है। अत: निकाय के *अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे*।

संभावना 2 : $c_1 \neq kc_2$

इस दशा में, समीकरण (1) से प्राप्त होता है :

$$ka_2x + kb_2y + c_1 = 0 \qquad (\text{क्योंकि } a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2)$$

या $\quad k(a_2x + b_2y) + c_1 = 0$

या $\quad k(-c_2) + c_1 = 0$ [समीकरण (2) से]

या $\quad c_1 = kc_2$

जो सही नहीं है। अत: इस दशा में *कोई हल नहीं है*।

इस अनुच्छेद के विचारों का सार-संक्षेप इन दो नियमों में स्पष्ट हो जाता है :

नियम A : समीकरण-निकाय

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \qquad (A)$$

का केवल एक हल अर्थात् *अद्वितीय हल* होगा, यदि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ हो।

अर्थात् यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो।

नियम B : यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ (माना) हो, तो समीकरण-निकाय (A)

(i) *के अपरिमित रूप से अनेक हल* होंगे, यदि $c_1 = kc_2$ हो।

(ii) का *कोई हल नहीं* होगा, यदि $c_1 \neq kc_2$ हो।

इस अध्याय में, हम स्वयं को उन्हीं समीकरण-निकायों तक सीमित रखेंगे जो नियम A के अंतर्गत आते हैं, अर्थात् जिनके लिए $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ है।

उदाहरण 9 : निम्नलिखित समीकरण-निकाय को वज्र-गुणन की विधि से हल कीजिए :

$$6x - y = 3$$

$$7x + 4y = 9$$

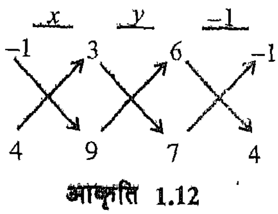
हल : यहाँ $a_1 = 6, b_1 = -1, a_2 = 7$ और $b_2 = 4$ है। अत:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 6 \times 4 - 7 \times (-1)$$
$$= 31 \neq 0$$

अत: दिए गए समीकरणों का एक अद्वितीय हल है। अब आकृति 1.10 की योजना के अनुसार (देखिए आकृति 1.12), हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{x}{(-1)(9)-(4)(3)} = \frac{y}{(3)(7)-(9)(6)} = \frac{-1}{(6)(4)-(7)(-1)}$$

या $$\frac{x}{-9-12} = \frac{y}{21-54} = \frac{-1}{24-(-7)}$$



आकृति 1.12

या $$\frac{x}{-21} = \frac{y}{-33} = \frac{-1}{31}$$

या $$x = \frac{21}{31} \text{ और } y = \frac{33}{31}$$

उदाहरण 10 : a के किन मानों के लिए समीकरण-निकाय

$$4x + ay + 5 = 0$$

$$2x + 3y + 7 = 0$$

का एक अद्वितीय हल होगा?

हल : यहाँ $a_1 = 4, a_2 = 2, b_1 = a, b_2 = 3$ है।

अत: $$a_1b_2 - a_2b_1 = 4 \times 3 - 2 \times a$$
$$= 12 - 2a$$

दिए गए निकाय का अद्वितीय हल होने के लिए,

$$12 - 2a \neq 0$$

या $$a \neq 6$$

अत: 6 के अतिरिक्त, a के सभी मानों के लिए, दिए गए समीकरण-निकाय का एक अद्वितीय हल होगा।

प्रश्नावली 1.3

निम्नलिखित समीकरण-निकायों को वज्र-गुणन विधि से हल कीजिए :

1. $2x + 3y = 7$
   $6x - 5y = 11$

2. $3x - 5y = 20$
   $7x + 2y = 17$

3. $7x - 2y = 3$
   $11x - \frac{3}{2}y = 8$

4. $6x + 5y = 11$
   $9x + 10y = 21$

5. $4x + 7y = 10$
   $10x - \frac{35}{2}y = 25$

6. $4x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$
   $6x - y + 2 = 0$

7. $\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}y - 1 = 0$
   $\frac{3}{5}x - \frac{5}{3}y + 2 = 0$

p के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित समीकरण-निकायों का एक अद्‌वितीय हल हो :

8. $px + 2y = 5$
$3x + y = 1$

9. $px + 3y = 7$
$2x - y = 6$

10. $9x + py - 1 = 0$
$3x + 4y - 2 = 0$

11. $7x - 5y - 4 = 0$
$14x + py + 4 = 0$

x और y में निम्नलिखित रैखिक समीकरण-निकायों को हल कीजिए :

12. $ax + by - a + b = 0$
$bx - ay - a - b = 0$

13. $x + y - (a + b) = 0$
$ax - by - (a^2 - b^2) = 0$

14. $a(x + y) + b(x - y) - (a^2 - ab + b^2) = 0$
$a(x + y) - b(x - y) - (a^2 + ab + b^2) = 0$

15. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 2 = 0$
$ax - by + b^2 - a^2 = 0$

16. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$
$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$

17. $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

18. $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

19. $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

1.6 व्यावहारिक समस्याओं में अनुप्रयोग

जैसा पहले कहा गया है, रैखिक समीकरण-निकायों को हल करने में हमारी रुचि का कारण यह है कि अनेक प्रकार की व्यावहारिक समस्याओं को हल करने के लिए हमें रैखिक समीकरणों के किसी निकाय को हल करना पड़ता है। अब ऐसी कुछ समस्याएँ हल की जाएँगी।

उदाहरण 11 : पुत्र की आयु (वर्षों में) का दुगुना, पिता की आयु में जोड़ने पर योगफल 90 प्राप्त होता है। पिता की आयु (वर्षों में) का दुगुना पुत्र की आयु में जोड़ें, तो योगफल 120 प्राप्त होता है। पिता और पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि पुत्र की आयु $= x$ वर्ष

और पिता की आयु $= y$ वर्ष

तब वर्षों में, पुत्र की आयु का दुगुना $= 2x$

दिया है कि

पुत्र की आयु का दुगुना + पिता की आयु = 90

या $$2x + y = 90 \qquad (1)$$

इसी प्रकार, दूसरे प्रतिबंध से प्राप्त होता है :

$$x + 2y = 120 \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$3x + 3y = 210$$

या $$x + y = 70 \qquad (3)$$

समीकरण (1) और (2) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$x + (x + y) = 90$$

$$(x + y) + y = 120$$

या $x = 20$

और $y = 50$ [क्योंकि (3) से $x + y = 70$]

इस प्रकार, पुत्र की आयु 20 वर्ष और पिता की आयु 50 वर्ष है।

टिप्पणी : समीकरणों (1) और (2) को आप किसी भी विधि से हल कर सकते हैं। यह सुझाव भी दिया जाता है कि आप प्राप्त हल (हलों) का दिए गए प्रतिबंधों से सत्यापन कर लें।

उदाहरण 12 : दो अंकों वाली एक संख्या और उसके अंकों का क्रम पलटकर प्राप्त होने वाली संख्या का योगफल 110 है। इस संख्या के अंकों का अंतर 6 है। ऐसी कितनी संख्याएँ हैं? ये सभी संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि संख्या के दहाई और इकाई के अंक क्रमशः x और y हैं। तब विस्तृत संकेतन (expanded notation) में इस संख्या को लिखा जा सकता है :

$$10x + y \qquad \text{(मूल संख्या)}$$

अंकों को पलटने पर x इकाई का, और y दहाई का अंक बन जाता है। विस्तृत संकेतन में यह

संख्या है :

$$10y + x \text{ (अंक पलटने पर)}$$

अत: प्रश्नानुसार, हमें प्राप्त होता है :

$$(10x + y) + (10y + x) = 110$$

या $\quad 11\,(x + y) = 110$

या $\quad x + y = 10 \quad (1)$

यह दिया गया है कि अंकों का अंतर 6 है।

अत:

या तो $\quad x - y = 6 \quad (2)$

और या $\quad y - x = 6 \quad (3)$

यदि $x - y = 6$, तो (1) और (2) को हल करने पर,

$$x = 8, y = 2$$

इस दशा में संख्या 82 हुई।

यदि $y - x = 6$, तो (1) और (3) को हल करने पर,

$$x = 2, y = 8$$

इस दशा में संख्या 28 हुई।

इस प्रकार, ऐसी दो संख्याएँ 82 और 28 हैं।

आप सत्यापित कर सकते हैं कि 82 और 28, दोनों ही इस समस्या के प्रतिबंधों को संतुष्ट करती हैं। जब समस्या के एक से अधिक हल हों, तब उन सभी हलों को ज्ञात करना चाहिए।

उदाहरण 13 : किसी भिन्न के अंश को 2 से गुणा करने और इसके हर में 2 जोड़ने पर, यह भिन्न $\frac{6}{7}$ हो जाती है। किन्तु दूसरी ओर, हर को 2 से गुणा करने पर और अंश में 2 जोड़ने से यह $\frac{1}{2}$ रह जाती है। यह भिन्न क्या है?

हल : माना कि भिन्न के अंश और हर क्रमश: n तथा d हैं, जिससे कि भिन्न $\frac{n}{d}$ हुई। दिए

गए प्रतिबंधों के अनुसार,

$$\frac{2n}{d+2} = \frac{6}{7} \text{ और } \frac{n+2}{2d} = \frac{1}{2}$$

या $$\frac{n}{d+2} = \frac{3}{7} \text{ और } \frac{n+2}{d} = 1$$

या $$7n = 3(d+2) \text{ और } n+2 = d$$

दूसरे समीकरण में से पहले समीकरण में $d = n + 2$ रखने पर,

$$7n = 3\{(n+2)+2\}$$

या $$7n = 3n + 12$$

या $$4n = 12$$

या $$n = 3$$

$\therefore$ $$d = n + 2 = 5$$

अत: अभीष्ट भिन्न $\frac{3}{5}$ है।

सत्यापन : $\frac{2\times 3}{5+2} = \frac{6}{7}$ और $\frac{3+2}{2\times 5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, जैसा कि दिया गया है। अत: हल सही है।

उदाहरण 14 : माला ने 5 कुर्सियाँ और 2 मेजें 1625 रु की खरीदीं। रेशमा ने 1 मेज और 2 कुर्सियाँ 750 रु की खरीदीं। प्रति कुर्सी और प्रति मेज, मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि एक कुर्सी का मूल्य x रु और एक मेज का मूल्य y रु है। तब 5 कुर्सियों का मूल्य $5x$ रु और 2 मेजों का मूल्य $2y$ रु होगा। इस प्रकार, माला द्वारा किया गया कुल व्यय हुआ :

$$5x \text{ रु} + 2y \text{ रु या } (5x+2y) \text{ रु}$$

क्योंकि माला ने कुल 1625 रु व्यय किए, अत:

$$5x + 2y = 1625 \qquad (1)$$

अब रेशमा की 2 कुर्सियों और 1 मेज की खरीद पर विचार करने से प्राप्त होता है :

$$2x + y = 750 \qquad (2)$$

(1) और (2) से दो चरों वाले रैखिक समीकरणों का एक निकाय प्राप्त होता है। इस निकाय को हल करने पर प्राप्त होता है :

$$x = 125 \quad \text{और} \quad y = 500$$

इस प्रकार, वांछित मूल्य 125 रु प्रति कुर्सी और 500 रु प्रति मेज हुआ।

ऊपर जैसी समस्याओं के हल के लिए कुछ लाभप्रद सुझाव :

1. उन अज्ञात राशियों की पहचान कीजिए जिनके विषय में कुछ सूचना दी गई है। इन राशियों को x, y, p, q आदि जैसा कोई चर नाम दीजिए।
2. सुनिश्चित कीजिए कि ऊपर वाले चरों में किस-किस का मान ज्ञात करना है।
3. एक-एक वाक्यांश पर ध्यान देते हुए, प्रश्न को पुनः पढ़िए। प्रत्येक वाक्यांश इन चरों में जो संबंध, अर्थात् समीकरण सुझाए, उसे लिख लीजिए।
4. अब प्रश्न में पूछे गए चरों के लिए समीकरणों को हल कर लीजिए।

प्रश्नावली 1.4

1. राम की आयु रहीम की आयु की तीन गुनी है। पाँच वर्ष बाद राम की आयु रहीम की आयु की ढाई गुनी होगी। राम की और रहीम की आयु इस समय क्या है?

2. पाँच वर्ष पहले नीता की आयु, गीता की आयु की तीन गुनी थी। दस वर्ष पश्चात् नीता की आयु, गीता की आयु की दुगुनी होगी। इस समय नीता की और गीता की आयु क्या है?

3. किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में से प्रत्येक में यदि 1 जोड़ दें, तो वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है। परंतु यदि प्रत्येक में से 5 घटा दें, तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

4. किसी भिन्न के अंश में 1 जोड़ने और उसके हर में से 1 घटाने पर 1 प्राप्त होता है। यदि यह भी ज्ञात हो कि उसके अंश में 1 जोड़ने पर $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है, तो भिन्न क्या होगी?

5. किसी भिन्न के हर में 5 जोड़ने और उसके अंश में से 5 घटाने पर $\frac{1}{7}$ प्राप्त होता है। यदि उसके अंश में से 3 घटाया जाए और उसके हर में 3 जोड़ा जाए, तो $\frac{1}{3}$ प्राप्त होता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

6. दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 8 है। अंकों को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या दी गई संख्या से 36 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

7. दो अंकों वाली एक संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना अंकों को पलटने पर प्राप्त संख्या का दुगुना है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

8. दो अंकों वाली एक संख्या का सात गुना, संख्या के अंकों को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या के चार गुने के बराबर है। यदि संख्या का एक अंक उसके दूसरे अंक से 3 अधिक हो, तो वह संख्या ज्ञात कीजिए।

9. दो श्रव्य (ऑडियो, audio) और तीन दृश्य (वीडियो, video) कैसेटों का मूल्य 340 रु है। परंतु तीन ऑडियो और दो वीडियो कैसेटों का मूल्य 260 रु है। एक ऑडियो कैसेट का और एक वीडियो कैसेट का अलग-अलग मूल्य ज्ञात कीजिए।

10. तीन कुर्सियों और दो मेजों का मूल्य 1850 रु है। पाँच कुर्सियों और तीन मेजों का मूल्य 2850 रु है। दो कुर्सियों और दो मेजों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

11. स्टेशन A से स्टेशन B के 2 टिकटों और स्टेशन A से स्टेशन C के 3 टिकटों के लिए 795 रु देने पड़ते हैं। परंतु स्टेशन A से B के 3, और A से C के 5 टिकटों के लिए कुल 1300 रु देने पड़ते हैं। स्टेशन A से B का और स्टेशन A से C तक का किराया ज्ञात कीजिए।

12. लंबाई को 5 मात्रक घटाने और चौड़ाई को 3 मात्रक बढ़ाने से एक आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग मात्रक कम हो जाता है। परंतु यदि लंबाई को 3 मात्रक और चौड़ाई को 2 मात्रक बढ़ाया गया होता, तो उसका क्षेत्रफल 67 वर्ग मात्रक बढ़ गया होता। आयत की लंबाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

13. यदि एक आयत की लम्बाई को 2 मात्रक बढ़ा दें और उसकी चौड़ाई को 2 मात्रक घटा दें, तो उसका क्षेत्रफल 28 वर्ग मात्रक घट जाता है। यदि लंबाई को 1 मात्रक कम कर दें और चौड़ाई को 2 मात्रक बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 33 वर्ग मात्रक बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ (dimensions) ज्ञात कीजिए।

14. एक व्यक्ति किसी मासिक वेतन विशेष पर नौकरी आरंभ करता है और प्रत्येक वर्ष उसके वेतन में एक नियत वृद्धि होती रहती है। यदि 4 वर्ष नौकरी करने के पश्चात् उसका वेतन 4500 रु हो और 10 वर्ष नौकरी कर लेने के पश्चात् उसका वेतन 5400 रु हो, तो उसका आरंभिक वेतन और नियत वार्षिक वृद्धि ज्ञात कीजिए।

15. रेल के आधे टिकट का किराया पूरे टिकट के किराए का आधा है और इस पर आरक्षण-शुल्क वही है जो पूरे टिकट पर है। स्टेशन A से स्टेशन B के एक आरक्षित प्रथम श्रेणी के टिकट के 2125 रु लगते हैं तथा A से B तक एक आरक्षित प्रथम श्रेणी के पूरे टिकट और प्रथम श्रेणी के ही एक आरक्षित आधे टिकट के कुल मिलाकर 3200 रु लगते हैं। स्टेशन A से B तक पूरा किराया और आरक्षण-शुल्क, पृथक्-पृथक् ज्ञात कीजिए।

16. Δ ABC में, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ है। तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
[**संकेत** : $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$।]

17. दो अंकों वाली एक संख्या या तो अंकों के योगफल को 8 से गुणा कर उसमें 1 जोड़ने से प्राप्त होती है या अंकों के अंतर को 13 से गुणा कर उसमें 2 जोड़ने से प्राप्त होती है। संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी कितनी संख्याएँ हैं?

18. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD में, $\angle A = (2x + 4)^\circ$, $\angle B = (y + 3)^\circ$, $\angle C = (2y + 10)^\circ$ और $\angle D = (4x - 5)^\circ$ है। चारों कोण ज्ञात कीजिए।

19. एक राजमार्ग पर दो बिंदुओं A तथा B के बीच 100 किमी की दूरी है। एक ही समय पर, एक कार A से और एक अन्य कार B से चलती है। अपनी-अपनी नियत चालों से ये कारें एक ही दिशा में चलती हुई 5 घंटे में मिलती हैं। यदि ये कारें एक-दूसरे की ओर चलें, तो 1 घंटे में ही मिल जाती हैं। दोनों कारों की चालें ज्ञात कीजिए।

20. एक व्यक्ति नदी की धारा की दिशा में 2 घंटे में 20 किमी और धारा के विरुद्ध 2 घंटे में 4 किमी नाव चला सकता है। स्थिर जल में इस व्यक्ति की नाव चलाने की चाल और धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

[**संकेत** : यदि नाव की चाल स्थिर जल में x किमी प्रति घंटा और धारा की चाल y किमी प्रति घंटा हो, तो धारा के विरुद्ध चाल $(x - y)$ किमी प्रति घंटा, और धारा के साथ चाल $(x + y)$ किमी प्रति घंटा होगी।]

21. एक व्यक्ति 4 घंटे में धारा के विरुद्ध 8 किमी और धारा के साथ-साथ 24 किमी नाव चला सकता है। 4 ही घंटे में वह धारा के साथ-साथ 12 किमी और धारा के विरुद्ध 12 किमी नाव चला सकता है। इस व्यक्ति की स्थिर जल में नाव चलाने की चाल और धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

अध्याय 2

बहुपदों का महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य

2.1 भूमिका

आप जानते हैं कि

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

जैसे बीजीय व्यंजकों को एक चर x में बहुपद (*polynomials*) कहते हैं, जहाँ कि

(i) केवल एक चर x आता हो और $n\ (\geq 0)$ एक पूर्णांक हो, और
(ii) $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हों।

उदाहरणत:, $2x^2 + 3x - 4$ चर x में एक बहुपद है। $y^3 - y + 5$, चर y में एक बहुपद है।

बहुपद में चर का अधिकतम घातांक (exponent) बहुपद की *घात* (*degree*) कहलाता है। इस प्रकार, $10y^3 - 2y^2 + 37$ की घात 3 है। अचर घात 0 के बहुपद समझे जाते हैं। इस प्रकार, 10 घात 0 वाला बहुपद है, क्योंकि 10 को हम $10x^0$ लिख सकते हैं।

इस अध्याय में, हम केवल पूर्णांक गुणांकों वाले बहुपदों पर ही विचार करेंगे। चर x वाले बहुपदों के लिए हम $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $r(x)$ इत्यादि जैसे व्यंजकों का प्रयोग करेंगे।

आप संख्याओं के लिए HCF (Highest Common Factor/महत्तम समापवर्तक) और LCM (Lowest Common Multiple/लघुतम समापवर्त्य) की धारणाओं से परिचित हैं। इस अध्याय में, हम बहुपदों के HCF और LCM की धारणाओं का अध्ययन करेंगे।

2.2 बहुपदों के गुणनखंड

याद कीजिए कि यदि कोई बहुपद $f(x)$, किन्हीं दो या दो से अधिक बहुपदों $g(x)$ और $h(x)$ आदि का गुणनफल हो, तो $g(x)$ और $h(x)$ आदि में से प्रत्येक $f(x)$ का एक गुणनखंड कहलाता

है। उदाहरणत:,

यदि $$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

हो, तो हम $f(x)$ को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$f(x) = 2(x-2)(x-3)$$

अत: $2, x-2$ और $x-3$ तीनों $f(x)$ के गुणनखंड हैं।

हम $f(x)$ को निम्न प्रकार भी लिख सकते थे :

$$f(x) = -2\ (3-x)(x-2)$$

इस प्रकार, -2 और $3-x$ भी $f(x)$ के गुणनखंड हैं। वास्तविकता यह है कि यदि $g(x)$ किसी बहुपद $f(x)$ का गुणनखंड हो, तो $-g(x)$ भी $f(x)$ का गुणनखंड होता है। सामान्यत:, बहुपदों पर विचार करते समय हम $g(x)$ और $-g(x)$ में से उसे चुनते हैं जिसमें x के अधिकतम घातांक वाले पद का गुणांक धनात्मक हो। इस प्रकार, ऊपर वाले बहुपद $g(x)$ के संदर्भ में, यह कहने की अपेक्षा कि $3-x$, $f(x)$ का गुणनखंड है, हम यह कहना अधिक पसंद करेंगे कि $x-3$, $f(x)$ का गुणनखंड है।

याद कीजिए कि जहाँ तक संख्याओं का प्रश्न है, पद *भाजक* और *गुणनखंड*, दोनों का तात्पर्य एक ही होता है। इस प्रकार, कथन '3, 6 का भाजक है' का अर्थ वही है जो कथन '3, 6 का गुणनखंड है' का है। संख्याओं की ही भाँति, बहुपदों के गुणनखंडों को भी इनका भाजक कहा तो जा सकता है, किन्तु हम भाजक की तुलना में पद गुणनखंड को वरीयता देंगे।

2.3 बहुपदों का महत्तम समापवर्तक

बहुपदों

$$f(x) = 2(x-2)^2\ (x-4)\ (2x-1)$$

और $$g(x) = 8\ (x-2)^3\ (2x-1)\ (3x+1)$$

पर विचार कीजिए। हम देखते हैं कि

$(x-2)$, $f(x)$ और $g(x)$ दोनों का गुणनखंड है। हम कहते हैं कि $(x-2)$, $f(x)$ और $g(x)$ का सार्व गुणनखंड है।

$(2x-1)$ भी $f(x)$ और $g(x)$ दोनों का ही गुणनखंड है। अर्थात् $(2x-1)$ भी $f(x)$ और $g(x)$ का सार्व गुणनखंड है।

क्या कोई और भी सार्व गुणनखंड हैं? हाँ, 2 और $(x-2)^2$ कुछ और सार्व गुणनखंड हैं।

पुनः,

$$r(x) = 2(x-2)^2 (2x-1)$$

भी $f(x)$ और $g(x)$ का सार्व गुणनखंड है, क्योंकि

$$f(x) = [2(x-2)^2 (2x-1)] (x-4) = r(x) (x-4),$$

$$g(x) = [2(x-2)^2 (2x-1)] \{4(x-2) (3x+1)\}$$

$$= r(x) \{4(x-2) (3x+1)\}$$

क्या $f(x)$ और $g(x)$ का कोई ऐसा सार्व गुणनखंड है जो $r(x)$ में निहित नहीं है? निश्चित रूप से नहीं। कारण यह है कि $f(x)$ के शेष गुणनखंड $(x-4)$ में और $g(x)$ के शेष गुणनखंड $\{4(x-2)(3x+1)\}$ में कोई सार्व गुणनखंड नहीं है। इस कारण यहाँ $r(x)$ को $f(x)$ और $g(x)$ का सबसे बड़ा सार्व गुणनखंड अर्थात् *महत्तम समापवर्तक* (*Highest Common Factor*) या HCF कहते हैं। ध्यान दीजिए कि सार्व गुणनखंडों 2, $x-2$, $(x-2)^2$, $(2x-1)$ में से प्रत्येक $r(x)$ का गुणनखंड है।

सामान्यतः,

$r(x)$ को बहुपदों $f(x)$ और $g(x)$ का HCF कहते हैं, यदि

1. *$r(x)$, $f(x)$ और $g(x)$ सार्व गुणनखंड हो,*
2. *$f(x)$ और $g(x)$ का प्रत्येक सार्व गुणनखंड $r(x)$ का भी गुणनखंड हो।*

अब जब यह स्पष्ट हो गया है कि दो बहुपदों के HCF से क्या तात्पर्य है, हम HCF ज्ञात करने की विधि पर ध्यान देंगे। आरंभ करने के लिए यह देखा जाए कि संख्याओं के संदर्भ में हम क्या करते हैं। दो दी गई संख्याओं, माना 36 और 54 का HCF ज्ञात करने की एक विधि निम्नलिखित है :

चरण 1 : प्रत्येक संख्या को अभाज्य संख्याओं के घातांकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

उदाहरणतः, $36 = 2^2 \times 3^2$

$54 = 2 \times 3^3$

चरण 2 : यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड न हो, तो HCF, 1 होगा। यदि कोई सार्व अभाज्य गुणनखंड हों, तो दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंडन में आने वाली प्रत्येक अभाज्य संख्या का न्यूनतम घातांक ज्ञात कीजिए।

उदाहरणतः, $2^2 \times 3^2$ तथा 2×3^3 में 2 एक अभाज्य सार्व गुणनखंड है और 2 का न्यूनतम घातांक 1 है।

3 एक अभाज्य सार्व गुणनखंड है और इसका न्यूनतम घातांक 2 है।

चरण 3 : अभाज्य सार्व गुणनखंडों को, इनके ज्ञात किए गए न्यूनतम घातांकों के साथ लेते हुए, गुणा कर, HCF प्राप्त कीजिए।

उदाहरणतः, ऊपर ली गई संख्याओं 36 और 54 के संदर्भ में,

(i) सार्व अभाज्य गुणनखंड 2, न्यूनतम घातांक 1

(ii) सार्व अभाज्य गुणनखंड 3, न्यूनतम घातांक 2

$$\therefore \qquad \text{HCF} = 2^1 \times 3^2 = 18$$

बहुपदों में, अभाज्य गुणनखंड के स्थान पर *अखंडनीय (irreducible) गुणनखंड* का प्रयोग किया जाता है। एक अखंडनीय गुणनखंड के 1 और स्वयं के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखंड नहीं होते। इस अर्थ में अखंडनीय गुणनखंड को *सरलतम* गुणनखंड कहा जाता है। उदाहरणतः, $x + 3$ अखंडनीय है।

$2x + 4$ अखंडनीय नहीं है, क्योंकि $2x + 4 = 2(x + 2)$ है।

$x^2 + 1$ अखंडनीय है, क्योंकि इसके आगे गुणनखंड नहीं किए जा सकते।

इस तथ्य पर भी ध्यान दीजिए कि ऊपर बताए गए अर्थ में *प्रत्येक अभाज्य संख्या भी अखंडनीय* है।

अब दिए गए दो (या अधिक) बहुपदों का HCF ज्ञात करने के लिए एक सुविधाजनक विधि दी जा सकती है, जिसके विभिन्न चरण निम्न हैं :

चरण 1 : प्रत्येक बहुपद को अखंडनीय गुणनखंडों की घातों के रूप में व्यक्त कीजिए (यह आवश्यक होगा कि संख्यात्मक गुणनखंडों को भी अभाज्य संख्याओं की घातों के रूप में व्यक्त किया जाए)।

चरण 2 : यदि कोई सार्व गुणनखंड न हो, तो HCF, 1 होगा। सार्व अखंडनीय गुणनखंड होने की दशा में, दिए गए बहुपदों के गुणनखंडनों में इन गुणनखंडों के न्यूनतम घातांक ज्ञात कीजिए।

चरण 3 : सार्व अखंडनीय गुणनखंडों को, चरण 2 में ज्ञात किए गए न्यूनतम घातांकों के साथ लेते हुए, गुणा कर HCF प्राप्त कीजिए।

अब दो या दो से अधिक बहुपदों का HCF ज्ञात करने के प्रक्रम को उदाहरणों द्वारा समझाया जाएगा।

उदाहरण 1 : बहुपदों $30(x^2 - 3x + 2)$ और $50(x^2 - 2x + 1)$ का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि $f(x) = 30\,(x^2 - 3x + 2),$

$$g(x) = 50\,(x^2 - 2x + 1)$$

चरण 1 : $f(x)$ और $g(x)$ को अखंडनीय गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखने पर,

$$f(x) = 2 \times 3 \times 5 \times (x - 1) \times (x - 2),$$

$$g(x) = 2 \times 5^2 \times (x - 1)^2$$

चरण 2 : $f(x)$ तथा $g(x)$ के सार्व अखंडनीय गुणनखंड और इनके न्यूनतम घातांक हैं :

सार्व अखंडनीय गुणनखंड	न्यूनतम घातांक
2	1
5	1
$x - 1$	1

चरण 3 : $\text{HCF} = 2^1 \times 5^1 \times (x - 1)^1$

$$= 10\,(x - 1)$$

अभ्यास से, बहुपदों का अखंडनीय गुणनखंडों में गुणनखंडन करने के पश्चात्, इनका HCF आप सीधे ही लिख पाएंगे। यह नीचे दर्शाया गया है :

उदाहरण 2 : $f(x) = 33\,(2x + 3)^2\,(3x - 4)^3\,(4x - 5)^4$

और $g(x) = 22\,(x + 1)\,(2x + 3)\,(4x - 5)^2\,(4x^2 - 9)$

का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = 3 \times 11\,(2x + 3)^2\,(3x - 4)^3\,(4x - 5)^4$

$$g(x) = 2 \times 11\,(x + 1)\,(2x + 3)\,(4x - 5)^2\,(2x + 3)\,(2x - 3)$$

$$= 2 \times 11\,(x + 1)\,(2x + 3)^2\,(2x - 3)\,(4x - 5)^2$$

यहाँ सार्व अखंडनीय गुणनखंड 11, $2x + 3$ और $4x - 5$ हैं। इन गुणनखंडों के न्यूनतम घातांक क्रमश: 1, 2 और 2 हैं।

$$\therefore \quad \text{HCF} = 11^1 \times (2x + 3)^2 \times (4x - 5)^2$$

$$= 11\,(2x + 3)^2\,(4x - 5)^2$$

उदाहरण 3 : बहुपदों

$$f(x) = 6(x^3 + 3x^2)\ (x^2 - 16)\ (x^2 + 9x + 18)$$

और $$g(x) = 8(x^4 + 4x^3)\ (x^2 + 6x + 9)^2$$

का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : ऐसा लगता है कि यहाँ $f(x)$ और $g(x)$ पहले ही अपने गुणनखंडित रूप में हैं। किन्तु ध्यान दीजिए कि गुणनखंड अखंडनीय नहीं हैं। HCF ज्ञात करने के लिए, बहुपदों को इस प्रकार गुणनखंडित करते हैं कि गुणनखंडों का आगे और गुणनखंडन न किया जा सके। घात दो या अधिक वाले गुणनखंड के लिए यह संभावना होती है कि वह दो या दो से अधिक रैखिक गुणनखंडों का गुणनफल हो। अब

$$f(x) = 6(x^3 + 3x^2)\ (x^2 - 16)\ (x^2 + 9x + 18)$$
$$= 2 \times 3\ \{x^2\ (x + 3)\}\ \{(x - 4)\ (x + 4)\}\ \{(x + 6)\ (x + 3)\}$$
$$= 2 \times 3\ x^2\ (x + 3)^2\ (x - 4)\ (x + 4)\ (x + 6)$$

और $$g(x) = 8\ (x^4 + 4x^3)\ (x^2 + 6x + 9)^2$$
$$= 2^3\ \{x^3\ (x + 4)\}\ \{(x + 3)^2\}^2$$
$$= 2^3\ x^3\ (x + 4)\ (x + 3)^4$$

इस प्रकार, सार्व अखंडनीय गुणनखंड $2, x, x + 3$ और $x + 4$ हैं। साथ ही, इनके संगत न्यूनतम घातांक क्रमशः 1, 2, 2 और 1 हैं।

अतः, $\text{HCF} = 2x^2\ (x + 3)^2\ (x + 4)$ है।

टिप्पणी : सार्व अखंडनीय गुणनखंड और इनके संगत न्यूनतम घातांक मन में ही निश्चित किए जा सकते हैं। इसके पश्चात् HCF सीधे ही लिखा जा सकता है।

उदाहरण 4 : बहुपदों

$$f(x) = 10(x + 1)\ (x - 3)^3,$$
$$g(x) = 15\ (x - 2)\ (x - 3)^2$$

और $$h(x) = 25\ (x + 5)\ (x - 3)^3$$

का HCF ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ निम्नलिखित तीनों बहुपदों में सार्व अखंडनीय गुणनखंड और इनके न्यूनतम घातांक ज्ञात करने हैं :

$$f(x) = 2 \times 5 \times (x+1) \times (x-3)^3$$

$$g(x) = 3 \times 5 \times (x-2) \times (x-3)^2$$

$$h(x) = 5^2 \times (x+5) \times (x-3)^3$$

अतः, $\text{HCF} = 5(x-3)^2$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्नलिखित बहुपदों के HCF लिखिए :
   - (i) $(x+1)(x-3)(x+2)^2$ और $(x+1)^2(x+2)$
   - (ii) $x^2(x+1)(x-3)$ और $x(x+1)^2(x+2)$
   - (iii) $2x^2(x+5)$ और $4x^3(x+5)^2(x+10)$
   - (iv) $8x(x+10)^2(x-5)$ और $12x^3(x+10)$
   - (v) $(2x+3)(3x+4)^2$ और $(2x+3)^2(3x+4)$
   - (vi) $(x+1)(x-2)(x-4)$, $(x-2)(x+4)$ और $(x-2)^2(x+1)$
   - (vii) (x^2+1) और (x^4+1)

2. निम्नलिखित बहुपदों का गुणनखंडन कीजिए और HCF ज्ञात कीजिए :
   - (i) $(x+1)(x^2-4)$ और $(x^2-1)(x-2)$
   - (ii) $21x(x^2-1)$ और $3x^3(x+1)$
   - (iii) $10(x^2-1)^2$ और $15(x+1)^4(2x+3)$
   - (iv) $3(x^2-9)(x+4)$ और $12(x-3)^2$
   - (v) $6(x+1)(x+2)$ और $9(x^3+1)$
   - (vi) $42(x^3-1)$ और $14(x^2-1)$

3. निम्नलिखित बहुपद-युग्मों का गुणनखंडन कीजिए और HCF ज्ञात कीजिए :
   - (i) x^2+3x+2 और x^2+6x+8
   - (ii) $5x(x^2-10x+21)$ और $25x^2(x^2-9)$
   - (iii) $4x^3(x^3+27)$ और $10x^5(x^2+6x+9)$
   - (iv) $24(x^4+x^3+x^2)$ और $16(x^4-x)$

(v) $16(x^2-1)(x^2+1)$ और $24(x^4-1)(x+1)$

(vi) $3(x-1)^5$ और $6(x^3-1)$

(vii) $4(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ और $6(x^3-1)(x^2-1)$

(viii) $9(x^4-1)$ और $6(x^2-1)(x+1)^2$

(ix) $(x+1)$ और $(x^2+1)(x^3-1)$

4. निम्नलिखित बहुपदों का HCF ज्ञात कीजिए :

(i) $(x+3)(x+5)^2, (x+5)(x+7)^2$ और $(x+2)(x+5)^3$

(ii) $2(x-7)(x+7)^2, 4(x-7)^2(x+8)$ और $8(x^2-49)$

(iii) x^2-1, x^4-1 और $(x-1)^2$

(iv) $4(x+2), 8(x+3)$ और $16(x+4)$

(v) $3(x+3), 5(x+3)(x+5)$ और $7(x+4)$

5. निम्नलिखित बहुपदों का HCF ज्ञात कीजिए :

(i) $(x^2+1)(x+11)$ और $(x^2+1)^2(x+11)^2$

(ii) $(x^2+x+1)(x+13)^2$ और $(x^2+x+1)^2(x+13)$

(iii) $(2x^2+3)(x^2+5x+1)$ और $4(2x^2+3)^2(x+5)$

(iv) $16(x^2+6)(x^2+1)$ और $24(x^2+1)^2(x-3)$

(v) $(x+a)^4(x-a)$ और $(x+a)^2(x-a+1)$

2.4 बहुपदों का लघुतम समापवर्त्य

समता $21 = 7 \times 3$ पर ध्यान दीजिए। यहाँ 21 को 7 और 3, दोनों का *गुणज* या *अपवर्त्य* (*multiple*) कहा जाता है। साथ ही, 7 और 3 दोनों 21 के गुणनखंड हैं। सामान्यत:, यदि कोई पूर्णांक n, किन्हीं दो पूर्णांकों k और m का गुणनफल हो, अर्थात् यदि $n = km$ हो, तो n को m का गुणज कहा जाता है। यहाँ n, k का भी गुणज है। इस तथ्य पर भी ध्यान दीजिए कि यदि n गुणज हो m का, तो m गुणनखंड होता है n का।

बहुपदों के संदर्भ में भी गुणज की धारणा ऐसी ही है। यदि ऊपर दी गई संख्याओं n, k और m के स्थान पर ऐसे बहुपद $f(x), g(x)$ और $h(x)$ हों कि

$$f(x) = h(x)\,g(x), \qquad (1)$$

तो $f(x)$ को $g(x)$ और $h(x)$ का गुणज कहा जाता है। यह भी समझ लीजिए कि यदि $f(x)$ गुणज हो $g(x)$ का, तो $g(x)$ गुणनखंड होता है $f(x)$ का। ध्यान दीजिए कि (1) से यह निष्कर्ष भी निकलता है कि $f(x), h(x)$ का गुणज है और $h(x), f(x)$ का गुणनखंड है।

याद कीजिए कि गुणनखंडों की बात करते समय हमने *सार्व गुणनखंडों* या *समापवर्तकों* और *महत्तम समापवर्तक* (HCF) पर विचार किया था। अतः यह स्वाभाविक होगा कि गुणजों की बात करते समय हम *सार्व गुणजों* या *समापवर्त्यों* और *लघुतम समापवर्त्य* (LCM) पर विचार करें।

आइए पहले याद करें कि दो दी गई संख्याओं, माना कि 8 और 12, का LCM कैसे निकालते हैं। अब

8 के गुणज हैं : 8, 16, 24, 32, 40, ...

12 के गुणज हैं : 12, 24, 36, 48, 60, ...

8 और 12 के इन गुणजों में संख्याएँ 24, 48, ... सार्व हैं। अतः ये सभी संख्याएँ 8 और 12 की सार्व गुणज हैं। इन सार्व गुणजों या समापवर्त्यों में 24 *सबसे छोटा* या *लघुतम गुणज* है। अतः यह 8 और 12 का *लघुतम समापवर्त्य* (LCM) है।

8 और 12 का LCM ज्ञात करने का एक अन्य विकल्प *अभाज्य गुणनखंडन* द्वारा भी है, जो इस प्रकार किया जाएगा :

$$8 = 2^3,$$
$$12 = 2^2 \times 3^1 ।$$

अब 8 और 12 के इन गुणनखंडों में आने वाली सभी अभाज्य संख्याओं को इनके अधिकतम घातांक के साथ ले लेते हैं। इस प्रकार, 2^3 और 3^1 प्राप्त होता है। इनका गुणनफल $2^3 \times 3^1$ (= 24) अभीष्ट LCM होगा। अब अभाज्य संख्याओं के स्थान पर अखंडनीय गुणनखंड लेकर, दो या दो से अधिक बहुपदों का LCM ऊपर की भाँति ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 5 : बहुपदों $(x-2)(x^2-3x+2)$ और x^2-5x+6 का LCM ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बहुपदों को $p(x)$ और $q(x)$ से व्यक्त करने पर,

$$p(x) = (x-2)(x^2-3x+2) = (x-1)(x-2)^2,$$
$$q(x) = x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

स्पष्टतः, $x-1$ और $(x-2)^2$ अनिवार्यतः $p(x)$ के प्रत्येक गुणज के गुणनखंड होंगे। इसी प्रकार, $x-2$ और $x-3$ आवश्यक रूप से $q(x)$ के प्रत्येक गुणज के गुणनखंड होंगे। अतः $x-1$, $x-2$, $(x-2)^2$ और $x-3$ अनिवार्यतः $p(x)$ और $q(x)$ के प्रत्येक सार्व गुणज के गुणनखंड होंगे। इन चार गुणनखंडों में से $x-2$ को छोड़ा जा सकता है, क्योंकि यदि $(x-2)^2$ किसी बहुपद का गुणनखंड हुआ, तो $x-2$ इसका गुणनखंड अवश्य ही होगा। अतः,

$$l(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)$$

आवश्यक रूप से $p(x)$ और $q(x)$ के प्रत्येक सार्व गुणज का गुणनखंड होगा। अतः $p(x)$ और $q(x)$ का LCM ऊपर वाला व्यंजक $l(x)$ है।

LCM ज्ञात करने की एक व्यावहारिक विधि

दो (या दो से अधिक) बहुपदों का LCM ज्ञात करने के लिए, हम तीन चरणों वाली निम्नलिखित विधि का प्रयोग कर सकते हैं :

चरण 1 : प्रत्येक बहुपद को अखंडनीय गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

चरण 2 : बहुपदों में आने वाले सभी अखंडनीय गुणनखंडों की सूची बनाइए (प्रत्येक गुणनखंड एक ही बार लिखा जाएगा)। सूची के प्रत्येक गुणनखंड के लिए दिए गए बहुपदों के गुणनखंडित रूप (चरण 1 से) में आया अधिकतम घातांक ज्ञात कीजिए।

चरण 3 : प्रत्येक अखंडनीय गुणनखंड को चरण 2 में प्राप्त उसके अधिकतम घातांक के साथ लेते हुए, इन सबको गुणा कर LCM ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 6 : बहुपदों

$$f(x) = 4(x-1)^2\,(x^2+6x+8)$$

और

$$g(x) = 10(x-1)\,(x+2)\,(x^2+7x+10)$$

का LCM ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 : बहुपदों को अखंडनीय गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में लिखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$f(x) = 2^2 \times (x-1)^2 \times (x+2) \times (x+4),$$

$$g(x) = 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2) \times (x+5) \times (x+2)$$

या

$$g(x) = 2 \times 5 \times (x-1) \times (x+2)^2 \times (x+5)$$

चरण 2 :

अखंडनीय गुणनखंड	अधिकतम घातांक
2	2
5	1
$x-1$	2
$x+2$	2
$x+4$	1
$x+5$	1

चरण 3 : $\text{LCM} = 2^2 \times 5^1 \times (x-1)^2 \times (x+2)^2 \times (x+4)^1 \times (x+5)^1$

$$= 20\,(x-1)^2\,(x+2)^2\,(x+4)\,(x+5)$$

उदाहरण 7 : बहुपदों $12\,(x^4 - x^3)$ और $8\,(x^4 - 3x^3 + 2x^2)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए बहुपदों को क्रमशः $p(x)$ और $q(x)$ से व्यक्त कीजिए।

अब

$$p(x) = 2^2 \times 3 \times x^3 \times (x-1)$$
$$q(x) = 2^3 \times x^2 \times (x-1) \times (x-2)$$

अखंडनीय गुणनखंड $2, 3, x, x-1$ और $x-2$ हैं। इनके संगत अधिकतम घातांक 3, 1, 3, 1 और 1 हैं।

$$\therefore \quad \text{LCM} = 2^3 \times 3^1 \times x^3 \times (x-1)^1 \times (x-2)^1$$
$$= 24\,x^3\,(x-1)\,(x-2)$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए $p(x)$ और $q(x)$ का HCF $4x^2(x-1)$ है।

अतः,

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = \{24x^3\,(x-1)\,(x-2)\} \times \{4x^2\,(x-1)\}$$
$$= 96x^5\,(x-1)^2\,(x-2)$$

पुनः, $\quad p(x) \times q(x) = 96x^5\,(x-1)^2\,(x-2)$

इस प्रकार,

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = p(x) \times q(x) \qquad \text{(A)}$$

अब निम्नलिखित बहुपद लीजिए:

$$f(x) = (1-x)\,(2-x),$$
$$g(x) = (2-x)\,(3-x)\,(4-x)$$

यहाँ $\quad \text{LCM} = (1-x)\,(2-x)\,(3-x)\,(4-x)$

$$= (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)$$
$$\text{HCF} = 2-x$$

HCF के अधिकतम घातांक वाले पद के गुणांक को धनात्मक बनाने पर,

$$\text{HCF} = x-2$$

अब $LCM \times HCF = (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)$

$$= -[(1-x)(2-x)] \times [(2-x)(3-x)(4-x)]$$

$$= -f(x) \times g(x) \qquad \text{(B)}$$

संख्याओं के निम्नलिखित नियम को याद कीजिए :

यदि m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, तो

$$(m \text{ और } n \text{ का}) \text{ LCM} \times (m \text{ और } n \text{ का}) \text{ HCF} = mn \qquad (1)$$

(A) और (B) से स्पष्ट होता है कि बहुपदों के लिए (1) के संगत नियम निम्नलिखित है :

$$\{f(x) \text{ और } g(x) \text{ का}\} \text{ LCM} \times \{f(x) \text{ और } g(x) \text{ का}\} \text{ HCF} = f(x)\,g(x) \text{ या } -f(x)\,g(x)$$

अतः उपर्युक्त परिणाम का प्रयोग सावधानी से करना चाहिए। इस परिणाम से चार राशियाँ LCM, HCF, $f(x)$ और $g(x)$ जुड़ी हैं। यदि $f(x)$, $g(x)$ दिए गए हों, और LCM तथा HCF में से एक दिया हो, तो दूसरा असंदिग्ध रूप से ज्ञात किया जा सकता है, क्योंकि LCM और HCF (गुणनखंड -1 के अतिरिक्त) अद्‌वितीय होते हैं।

यदि HCF, LCM दिए हुए हों और $f(x)$ तथा $g(x)$ में से एक, माना कि $f(x)$ ज्ञात हो, तो $g(x)$ अद्‌वितीय रूप से ज्ञात नहीं किया जा सकता। दो बहुपद, $g(x)$ और $-g(x)$, ऐसे होंगे जिनके $f(x)$ के साथ LCM और HCF वही होंगे जो दिए गए हैं।

दिए गए बहुपदों को $f(x)$ और $g(x)$ से व्यक्त कीजिए। HCF को $h(x)$ से और LCM को $l(x)$ से व्यक्त कीजिए। तब हमें प्राप्त होता है :

$$h(x) \times l(x) = \pm f(x) \times g(x) \qquad (2)$$

उदाहरण 8 : $(x-1)(x^3+3)$ और $(x-1)^2(x^2+5)$ का LCM ज्ञात कीजिए और फिर निर्धारित कीजिए कि इन बहुपदों का HCF, $x-1$ है।

हल : दोनों बहुपदों के सभी अखंडनीय गुणनखंडों को, उनके अधिकतम घात के साथ लेते हुए, गुणा करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\text{LCM} = (x-1)^2(x^3+3)(x^2+5)$$

ऊपर के संबंध (2) का प्रयोग करने पर,

$$\text{HCF} \times \{(x-1)^2(x^3+3)(x^2+5)\} = \pm\{(x-1)(x^3+3)\}\{(x-1)^2(x^2+5)\}$$

दोनों ओर के सार्व गुणनखंडों को निरस्त करने पर,

$$\text{HCF} = \pm(x-1)$$

अधिकतम घात वाले पद के गुणांक को धनात्मक करने के लिए, चिह्न '+' का चयन करने पर, प्राप्त वांछित

$$\text{HCF} = x - 1$$

उदाहरण 9 : दो बहुपदों के HCF और LCM क्रमशः $(4x+5)(3x-7)^2$ और $(4x+5)^3(3x-7)^3$ हैं। यदि दोनों में से एक बहुपद $(4x+5)^3(3x-7)^2$ हो, तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल : जो बहुपद ज्ञात करना है उसे $g(x)$ से व्यक्त करने और संबंध (2) का प्रयोग करने पर,

$$\pm (4x+5)^3 (3x-7)^2 \times g(x) = \{(4x+5)(3x-7)^2\}\{(4x+5)^3(3x-7)^3\}$$

$$= (4x+5)^4 (3x-7)^5$$

सार्व गुणनखंडों को निरस्त करने पर,

$$\pm\ g(x) = (4x+5)(3x-7)^3$$

अर्थात् $g(x) = (4x+5)(3x-7)^3$ या $-(4x+5)(3x-7)^3$

उदाहरण 10 : यदि बहुपदों

$$p(x) = x^2 - 5x + 6$$

और $q(x) = x^2 + 4x - 12$

का HCF, $(x-2)$ हो, तो उनका LCM ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि LCM × HCF $= \pm\, p(x) \times q(x)$

या $\text{LCM} \times (x-2) = \pm (x^2 - 5x + 6) \times (x^2 + 4x - 12)$

$$= \pm (x-2)(x-3) \times (x-2)(x+6)$$

या $\text{LCM} = \pm (x-3)(x-2)(x+6)$

चिह्न को इस प्रकार चुनने पर कि अधिकतम घात वाले पद का गुणांक धनात्मक हो जाए,

$$\text{LCM} = (x-3)(x-2)(x+6)$$

उदाहरण 11 : बहुपदों $(x+3)(-x^2+10x-25)$ और $(x-5)(x+3)^3$ का LCM ज्ञात कीजिए और फिर निर्धारित कीजिए कि इन बहुपदों का HCF, $(x+3)(x-5)$ है।

हल : मान लीजिए कि

$$f(x) = (x+3)(-x^2+10x-25) = -(x+3)(x-5)^2$$

और $g(x) = (x-5)(x+3)^3$ है।

अधिकतम घात वाले पद का गुणांक धनात्मक लेने पर,

$$f(x) \text{ और } g(x) \text{ का LCM } = (x+3)^3 (x-5)^2$$

संबंध (2) के प्रयोग द्वारा,

$$(x+3)^3(x-5)^2 \times \text{HCF} = \pm \{-(x+3)(x-5)^2\} \times \{(x-5)(x+3)^3\}$$
$$= \pm (x+3)^4(x-5)^3$$

अत:, $$\text{HCF} = \pm (x+3)(x-5)$$

अधिकतम घात वाले पद का गुणांक धनात्मक लेने पर,

$$\text{HCF} = (x+3)(x-5)$$

उदाहरण 12 : $f(x) = 13(x-1)(x-2)^2$, $g(x) = 7(x-2)^2 (x+3)^2$ और $h(x) = (x-1)^2 (x+3)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x)$, $g(x)$ और $h(x)$ में से किसी-न-किसी में आने वाले अखंडनीय गुणनखंड हैं :
$7, 13, (x-1), (x-2)$ और $(x+3)$

इनके अधिकतम घातांक क्रमशः 1, 1, 2, 2 और 2 हैं।

अत:, $$\text{LCM} = 7 \times 13 \times (x-1)^2 \times (x-2)^2 \times (x+3)^2$$
$$= 91 (x-1)^2 (x-2)^2 (x+3)^2$$

उदाहरण 13 : यदि बहुपदों

$$p(x) = (x^2+2x-8)(x^2+4x+a)$$

और $$q(x) = (x^2+2x+1)(x^2+3x-b)$$

का HCF $(x-2)(x+1)$ हो, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल : $p(x)$ और $q(x)$ के गुणनखंडन करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$p(x) = (x+4)(x-2)(x^2+4x+a),$$
$$q(x) = (x+1)(x+1)(x^2+3x-b)$$

क्योंकि $(x-2)(x+1)$, $p(x)$ और $q(x)$ का HCF है, अत:

$x+1$, x^2+4x+a का गुणनखंड है (1)

और $x-2$, x^2+3x-b का गुणनखंड है। (2)

(1) से ज्ञात होता है कि

$-1, x^2 + 4x + a$ का एक शून्यक (zero) है।

अतः, $(-1)^2 + 4(-1) + a = 0$

या $a - 3 = 0$

या $a = 3$

(2) से ज्ञात होता है कि

$2, x^2 + 3x - b$ का एक शून्यक है।

अतः, $2^2 + 3 \times 2 - b = 0$

या $10 - b = 0$

या $b = 10$

अतः, a और b के मान क्रमशः 3 और 10 हैं।

उदाहरण 14 : k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $x^2 + 2kx + 3k + 3$ और $x^2 + x - 5k$ का HCF, $x + 5$ हो।

हल : क्योंकि $x + 5$ दिए गए बहुपदों का HCF है, अतः $x + 5$ दिए गए दोनों बहुपदों का गुणनखंड है। इसका अर्थ यह हुआ कि -5 दिए गए दोनों बहुपदों का एक शून्यक है।

अर्थात् $(-5)^2 + 2k(-5) + 3k + 3 = 0$ और $(-5)^2 + (-5) - 5k = 0$

या $28 - 7k = 0$

और $20 - 5k = 0$

ऊपर के दोनों समीकरणों से हमें प्राप्त होता है :

$$k = 4$$

अतः, k का अभीष्ट मान 4 है।

सत्यापन : दिए गए बहुपदों में $k = 4$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$x^2 + 8x + 15$ और $x^2 + x - 20$

या $(x + 3)(x + 5)$ और $(x - 4)(x + 5)$

इस प्रकार $k = 4$ होने पर, दिए गए बहुपदों का HCF वास्तव में $x + 5$ है।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित बहुपदों के LCM लिखिए :

   (i) $(x-1)(x-2)$ और $(x-2)(x-7)$

   (ii) $(2x+3)(x+7)^2$ और $(2x+3)^2(4x+5)$

   (iii) $3(x-5)^3$ और $12(x-5)(5x+1)$

   (iv) $25(x+9)(x+8)$ और $5(x+9)^2(x+8)^2$

   (v) $2(x^2+x)$ और $4x^2(x+1)$

   (vi) $(x+1)(x^2+x+1)$ और $(x-1)$

   (vii) $(2x^2+3)(x+3)$ और $(x+3)^2(2x^2+3)^2$

2. निम्नलिखित बहुपद-युग्मों के LCM ज्ञात कीजिए :

   (i) $(x-3)^2(x+2)$ और $(x-3)^4(x+2)^3(x+1)$

   (ii) $2(x+1)^4(x-1)^2(x+2)$ और $8(x+1)^2(x-1)^3(x+2)^2$

   (iii) $6(2x+3)^3(5x-7)$ और $9(2x+3)(5x-7)(5x+6)$

   (iv) $9x^2(x+4)(x-4)^4$ और $17x^5(x+4)(x-3)^3$

3. गुणनखंड कर निम्न का LCM ज्ञात कीजिए :

   (i) $11x^3(x+1)^3$ और $121x(2x^2+3x+1)$

   (ii) $25(x^2+7x+12)$ और $15x(x^2-16)$

   (iii) $x(8x^3+27)$ और $2x^2(2x^2+9x+9)$

   (iv) $6(x+2)^2(x^2-x+1)$ और $15(x+1)(x+2)^3$

4. नीचे दिए गए बहुपदों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए। सत्यापित कीजिए कि HCF और LCM के गुणनफल, तथा बहुपदों के गुणनफलों में यदि कोई अंतर है, तो वह केवल गुणनखंड -1 का है।

   (i) $(2x+1)^2(3x-5)^2$ और $(2x+1)(3x-5)^3$

   (ii) $(x+3)(x+4)(x+5)^2$ और $(x+3)^2(x+4)^3$

   (iii) $1-x^2$ और x^3-1

   (iv) $1-x^2$ और x^4-1

5. दो बहुपदों $p(x)$ और $q(x)$ के HCF तथा LCM क्रमश: $5(x+3)(x-1)$ और $20x(x^2-9)(x^2-3x+2)$ हैं। यदि $p(x) = 10(x^2-9)(x-1)$ हो, तो $q(x)$ ज्ञात कीजिए।

6. दो बहुपदों $p(x) = (x-3)(x^2+x-2)$ और $q(x) = x^2-5x+6$ का HCF , $x-3$ है। $p(x)$ और $q(x)$ का LCM ज्ञात कीजिए।

7. यदि बहुपदों

$$p(x) = (x-1)(x^2+3x+a)$$

और $$q(x) = (x+2)(x^2+2x+b)$$

का HCF $(x-1)(x+2)$ हो, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

8. a और b के मान ज्ञात कीजिए, यदि बहुपदों

$$f(x) = (x+3)(2x^2-3x+a)$$

और $$g(x) = (x-2)(3x^2+10x-b)$$

का HCF, $(x+3)(x-2)$ हो।

9. a और b के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए बहुपदों

$$p(x) = (x^2+3x+2)(x^2+2x+a)$$

और $$q(x) = (x^2+7x+12)(x^2+7x+b)$$

का HCF, $(x+1)(x+3)$ हो जाए।

10. k के किस मान (किन मानों) के लिए $x^2+x-(2k+2)$ और $2x^2+kx-12$ का HCF, $x+4$ होगा?

11. निम्नलिखित में कौन से कथन असत्य हैं? इन्हें सत्य बनाइए।

(i) प्रत्येक बहुपद के गुणनखंडों की संख्या परिमित (finite) होती है।

(ii) प्रत्येक बहुपद के गुणजों की संख्या परिमित होती है।

(iii) घात 2 वाले दो बहुपदों का HCF एक अचर हो सकता है।

(iv) घात 2 वाले दो बहुपदों का LCM एक अचर हो सकता है।

(v) दो बहुपदों के HCF की घात इनके LCM की घात से सदैव कम होती है।

अध्याय 3

परिमेय व्यंजक

3.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में आपने पूर्णांकों और उनके योग, गुणन आदि के संबंध में अध्ययन किया था। नवीं कक्षा में, आपने बहुपदों और उनके योग, गुणन आदि का अध्ययन किया है। याद कीजिए कि एक बहुपद में x के केवल ऋणेतर घातांक ही होते हैं एवं x की प्रत्येक घात का गुणांक वास्तविक संख्या होती है।

पूर्णांकों एवं बहुपदों के योग एवं गुणन के गुणधर्म समान होते हैं, जैसा कि निम्नलिखित तुलना से स्पष्ट होता है :

पूर्णांक	बहुपद
1. दो पूर्णांकों का योग (अंतर) एक पूर्णांक होता है।	1. दो बहुपदों का योग (अंतर) एक बहुपद होता है।
2. पूर्णांक शून्य (0) ऐसा है कि किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a+0=a$	2. शून्य बहुपद (जिसे हम 0 से प्रकट करते हैं) ऐसा होता है कि किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $p(x)+0=p(x)$
3. किसी पूर्णांक a के लिए एक ऐसा पूर्णांक $-a$ होता है कि $a+(-a)=0$	3. किसी बहुपद $p(x)$ के लिए एक ऐसा बहुपद $-p(x)$ होता है कि $p(x)+[-p(x)]=0$
4. किन्हीं भी दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक होता है।	4. किन्हीं भी दो बहुपदों का गुणनफल एक बहुपद होता है।
5. पूर्णांक 1 ऐसा है कि किसी पूर्णांक a के लिए, $a\,.\,1=a$	5. बहुपद 1 ऐसा बहुपद है कि किसी बहुपद $p(x)$ के लिए, $p(x)\,.\,1=p(x)$

उपर्युक्त गुणधर्मों के आधार पर हम कह सकते हैं कि बहुपद '*पूर्णांकों की तरह व्यवहार करते हैं*।' स्मरण कीजिए कि $\frac{m}{n}$ के रूप की संख्याएँ, जहाँ m एवं n पूर्णांक हैं $(n \neq 0)$, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

निम्नलिखित परिणामों से आप भली-भाँति परिचित हैं :

(i) यदि m एवं n $(n \neq 0)$ पूर्णांक हैं, तब यह आवश्यक नहीं कि $\frac{m}{n}$ भी पूर्णांक हो।

(ii) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।

(iii) $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$ एवं $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}$ ।

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि पूर्णांक एवं बहुपद बीजीय रूप से समान हैं। इसलिए हम अब उस बीजीय व्यंजक का परिचय देंगे जो कि परिमेय संख्या के समान व्यवहार करता है और जिसे *परिमेय व्यंजक* (*rational expression*) कहते हैं। पहले हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं :

$\frac{p(x)}{q(x)}$ के रूप का व्यंजक, जहाँ $p(x), q(x)$ बहुपद हैं तथा $q(x)$ *शून्येतर बहुपद* है, *परिमेय व्यंजक* कहलाता है।

परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ में $p(x)$ को *अंश* और $q(x)$ को हर कहा जाता है। स्पष्टतया, यह आवश्यक नहीं है कि $\frac{p(x)}{q(x)}$ एक बहुपद हो। प्रत्येक बहुपद $p(x)$ एक परिमेय व्यंजक है, क्योंकि हम $p(x)$ को $\frac{p(x)}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं।

इस संकल्पना को समझने के लिए, हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

(i) $\frac{4x-3}{x^2-x+1}$ एक परिमेय व्यंजक है जिसका अंश एक रैखिक बहुपद है एवं हर एक द्विघात बहुपद है।

(ii) $\dfrac{x^3+\sqrt{2}x^2-4x+5}{x^2-\sqrt{3}x+8}$ एक परिमेय व्यंजक है जिसका अंश एक त्रिघात बहुपद है एवं हर एक द्विघात बहुपद है।

(iii) $\dfrac{x^3+3\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$ एक परिमेय व्यंजक नहीं है, क्योंकि अंश एक बहुपद नहीं है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्न बीजीय व्यंजकों में से कौन-से व्यंजक बहुपद हैं?

(i) $x^3+\sqrt{5}x+4$ (ii) $x^2+3\sqrt{x}-4$

(iii) $x^2+x\sqrt{x}+5$ (iv) $\dfrac{x^2+2x-1}{2x-3}$

2. निम्न व्यंजकों में से कौन-से परिमेय व्यंजक हैं?

(i) $\dfrac{x^3+3x^2+4}{x^2-1}$ (ii) $\dfrac{x^2+\sqrt{3}x+5}{x+\sqrt{2}}$

(iii) $\dfrac{x^2+1}{3x\sqrt{x}+2}$ (iv) x^2+4x-8

3. एक व्यापक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसका अंश एक रैखिक बहुपद हो एवं हर एक द्विघात बहुपद हो।

4. एक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसका अंश एक द्विपद हो और हर एक त्रिपद हो।

5. एक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसका अंश शून्यक 2 और -1 वाला एक द्विघात बहुपद हो और हर शून्यक $\dfrac{1}{2}$ और 3 वाला एक द्विघात बहुपद हो।
[**संकेत :** अंश $(x-2)(x+1)$ है तथा हर $(2x-1)(x-3)$ है।]

6. एक परिमेय व्यंजक लिखिए जिसका अंश शून्यक 2 एवं -3 वाला एक द्विघात बहुपद हो और हर शून्यक -2, 1 एवं 4 वाला एक त्रिघात बहुपद हो।

3.2 निम्नतम पदों में परिमेय व्यंजक

हम एक परिमेय संख्या $\frac{m}{n}$ को अपने *लघुतम* या *निम्नतम पदों* (*lowest terms*) में होना तब कहते हैं जबकि HCF $[m,n]=1$ हो, जहाँ HCF $[m,n]$ का अर्थ m तथा n का महत्तम समापवर्तक है। यदि $\frac{m}{n}$ अपने निम्नतम पदों में न हो, तो हम अंश और हर में से HCF $[m,n]$ का निरसन करके उसे निम्नतम पदों में प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, यदि $p(x), q(x)$ पूर्णांक गुणांकों वाले ऐसे बहुपद हों कि HCF $[p(x), q(x)] = 1$ हो, तो हम कह सकते हैं कि परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ अपने निम्नतम पदों में है।

यदि $\frac{p(x)}{q(x)}$ अपने निम्नतम पदों में नहीं हो, तो अंश और हर दोनों में से HCF $[p(x), q(x)]$ का निरसन करके उसे निम्नतम पदों में प्राप्त कर लेते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों पर ध्यान दें।

उदाहरण 1 : जाँच कीजिए कि परिमेय व्यंजक $\frac{(x+2)(x-4)}{(x+1)}$ अपने निम्नतम पदों में है या नहीं।

हल : इस व्यंजक में अंश के गुणनखंड $(x+2)$ एवं $(x-4)$ हैं और हर का केवल एक गुणनखंड $(x+1)$ है। इसलिए, अंश एवं हर का HCF, 1 है।

अत: यह परिमेय व्यंजक अपने निम्नतम पदों में है।

उदाहरण 2 : जाँच कीजिए कि परिमेय व्यंजक $\frac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ अपने निम्नतम पदों में है या नहीं।

हल : यहाँ अंश $p(x) = x^2 + 1$

तथा हर $q(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

इसलिए, HCF $[p(x), q(x)] = 1$

अत: यह व्यंजक अपने निम्नतम पदों में है।

उदाहरण 3 : जाँच कीजिए कि परिमेय व्यंजक $\frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+5)}$ अपने निम्नतम पदों में है या नहीं। यदि नहीं, तो इसे निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : यहाँ, $p(x) = (x + 3)(x - 2)$

तथा $q(x) = (x - 2)(x + 5)$ है।

इसलिए, HCF $[p(x), q(x)] = x - 2$, जो कि 1 नहीं है। इसलिए यह व्यंजक अपने निम्नतम पदों में नहीं है।

अब $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}$$

(हमने अंश एवं हर से HCF, $x - 2$ का निरसन किया है)

अत: दिया हुआ व्यंजक अपने निम्नतम पदों में $\frac{x+3}{x+5}$ है।

उदाहरण 4 : निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को उसके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$$

हल : $p(x) = 6x^2 - 5x + 1 = (2x - 1)(3x - 1)$

$q(x) = 9x^2 + 12x - 5 = (3x + 5)(3x - 1)$

इसलिए, HCF $[p(x), q(x)] = 3x - 1$

अत:, $$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$$ (अंश एवं हर दोनों में से $(3x - 1)$ का निरसन करने पर)

अत: दिया हुआ व्यंजक अपने निम्नतम पदों में $\frac{2x-1}{3x+5}$ है।

उदाहरण 5 : निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को उसके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$$

हल : $p(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$

$q(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$

इसलिए, $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)}$

अब HCF $[p(x), q(x)] = (x-3)(x-1)$

अत: अंश एवं हर में से $(x-3)\,(x-1)$ का निरसन करने पर, अपने निम्नतम पदों में परिमेय व्यंजक $\frac{x-4}{x+1}$ है।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित परिमेय व्यंजक को उसके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{x^3-x-6}{x^3-3x^2+4}$$

हल : यहाँ $p(x) = x^3 - x - 6$ एवं $q(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ है।

यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$$p(2) = 0 = q(2)$$

इसलिए गुणनखंड प्रमेय से, $(x-2)$ दोनों $p(x)$ एवं $q(x)$ का गुणनखंड है। अब हम $p(x)$ एवं $q(x)$ के शेष गुणनखंड प्राप्त करते हैं (या आप $p(x)$ एवं $q(x)$ को $(x-2)$ से भाग देकर प्रत्येक का दूसरा गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं)।

अत:, $p(x) = (x-2)(x^2+2x+3)$

$q(x) = (x-2)(x^2-x-2)$

चूंकि $x^2 + 2x + 3$ को रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित नहीं किया जा सकता (क्यों?), इसलिए

$$\text{HCF}\,[p(x), q(x)] = x - 2$$

गुणनखंड $(x-2)$ का निरसन करने पर, अपने निम्नतम पदों में परिमेय व्यंजक निम्न है :

$$\frac{x^2+2x+3}{x^2-x-2}$$

प्रश्नावली 3.2

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों में से प्रत्येक अपने निम्नतम पदों में है या नहीं। यदि नहीं, तो इसे निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

1. $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$ **2.** $\dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$ **3.** $\dfrac{x^3-1}{x^2+x+1}$

4. $\dfrac{x^2-13x+42}{x^2-8x+12}$ **5.** $\dfrac{x^2-4}{x^3+8}$ **6.** $\dfrac{x^4+a^2x^2}{x^4-a^4}$

7. $\dfrac{x^3-19x+30}{x^2-3x-40}$ [**संकेत :** चूंकि $p(2)=0$ है, अत: $x-2$ अंश का एक गुणनखंड है।]

8. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ [**संकेत :** $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2$]

9. $\dfrac{x^4-6x^3+36x^2}{x^3+216}$ **10.** $\dfrac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$

11. $\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ **12.** $\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

13. $\dfrac{16x^5-16x}{(4x^2+4)(2x+2)}$ **14.** $\dfrac{9x^2-(x^2-4)^2}{3x+4-x^2}$

15. $\dfrac{(x^2+3x+2)(x^2+5x+6)}{x^2(x^2+4x+3)}$

3.3 परिमेय व्यंजकों का योग

यदि $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\dfrac{r(x)}{s(x)}$ दो परिमेय व्यंजक हों, तो उनके योग को हम

$$\frac{p(x)}{q(x)}+\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)s(x)+q(x)r(x)}{q(x)s(x)}$$

से दर्शाते हैं।

यदि परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ समान हर वाले हों, तब

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x)+r(x)}{q(x)}$$

होता है।

टिप्पणी : परिमेय संख्याओं के योग एवं परिमेय व्यंजकों के योग की समानता पर आप ध्यान दें। यह गुणन एवं भाग के लिए भी सत्य होगा।

उदाहरण 7 : $\frac{x^2+1}{x-2}$ और $\frac{x^2-1}{x-2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : चूंकि दोनों व्यंजकों के हर समान हैं, इसलिए

$$\frac{x^2+1}{x-2}+\frac{x^2-1}{x-2} = \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x-2} = \frac{2x^2}{x-2}$$

उदाहरण 8 : परिमेय व्यंजकों $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ और $\frac{x-1}{x-2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-4+x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$$

उदाहरण 9 : परिमेय व्यंजकों $\frac{x+1}{(x-1)^2}$ और $\frac{1}{x+1}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$$

उदाहरण 10 : परिमेय व्यंजकों $\frac{3x+2}{x^2-16}$ और $\frac{x-5}{(x+4)^2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{3x+2}{x^2-16}+\frac{x-5}{(x+4)^2} = \frac{3x+2}{(x-4)(x+4)}+\frac{x-5}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{(3x+2)(x+4)+(x-5)(x-4)}{(x-4)(x+4)^2}$$

$$= \frac{3x^2+14x+8+x^2-9x+20}{(x-4)(x+4)^2}$$

$$= \frac{4x^2+5x+28}{(x^2-16)(x+4)}$$

$$= \frac{4x^2+5x+28}{x^3+4x^2-16x-64}$$

टिप्पणी : यहाँ योग प्राप्त करने के लिए हमने पहले हरों $x^2-16=(x-4)(x+4)$ तथा $(x+4)^2$ का LCM ज्ञात किया जो कि $(x-4)(x+4)^2$ है और फिर हमने उसी प्रकार हल किया जैसे कि दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

उदाहरण 11 : $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$ और $\frac{x+1}{x^3+2}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{x^2+x-1}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^3+2} = \frac{(x^2+x-1)(x^3+2)+(x+1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$

$$= \frac{(x^5+x^4-x^3+2x^2+2x-2)+(x^3+x^2-x-1)}{(x^2-1)(x^3+2)}$$

$$= \frac{x^5+x^4+3x^2+x-3}{x^5-x^3+2x^2-2}$$

परिमेय व्यंजक का योज्य प्रतिलोम

ध्यान दीजिए कि यदि हम किसी परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ को परिमेय व्यंजक $\frac{-p(x)}{q(x)}$ में जोड़ें, तो हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{-p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)+(-p(x))}{q(x)} = \frac{0}{q(x)} = 0$$

$\frac{-p(x)}{q(x)}$, व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ का *योज्य प्रतिलोम* (*additive inverse*) कहलाता है।

उदाहरण 12 : परिमेय व्यंजक $\frac{x^3-2x}{x^2+3}$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{x^3-2x}{x^2+3}$ का योज्य प्रतिलोम $\frac{-(x^3-2x)}{x^2+3}$, अर्थात $\frac{-x^3+2x}{x^2+3}$ है।

अब हम दो परिमेय संख्याओं के योग के एक आधारभूत गुणधर्म का कथन लिखेंगे एवं उसे सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3.1 : *दो परिमेय व्यंजकों का योग सदैव एक परिमेय व्यंजक हाता है।*

उपपत्ति : मान लीजिए $\frac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ कोई दो परिमेय व्यंजक हैं।

तब, $q(x) \neq 0$ और $s(x) \neq 0$ है। अब हमें ज्ञात है :

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x)+r(x).q(x)}{q(x).s(x)}$$

चूंकि $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ और $s(x)$ सभी बहुपद हैं, इसलिए $p(x)s(x) + r(x)q(x)$ भी एक बहुपद है, जिसे हम $P(x)$ से दर्शाते हैं। (स्मरण कीजिए कि दो बहुपदों के योगफल एवं गुणनफल पुनः बहुपद होते हैं।)

फिर $q(x) \neq 0$ एवं $s(x) \neq 0$ है। अतः $q(x)s(x) \neq 0$ है।

हम $q(x)s(x)$ को $Q(x)$ से दर्शाते हैं, जो कि शून्य बहुपद नहीं है। अतः,

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

जहाँ, $P(x)$ एवं $Q(x)$ बहुपद हैं और $Q(x)$ शून्य बहुपद नहीं है।

इसलिए, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ एक परिमेय व्यंजक है।

हम दो परिमेय व्यंजकों के अंतर को पहले परिमेय व्यंजक तथा दूसरे परिमेय व्यंजक के योज्य प्रतिलोम के योग के रूप में परिभाषित करते हैं, जैसा कि परिमेय संख्याओं के लिए किया गया था।

यदि $\frac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ परिमेय व्यंजक हैं, तो

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{-r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)s(x) - r(x)q(x)}{q(x)s(x)}$$

और
$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} + \frac{-r(x)}{q(x)} = \frac{p(x) - r(x)}{q(x)}$$

जो कि एक परिमेय व्यंजक है, जैसा कि हमने ऊपर दर्शाया है।

उदाहरण 13 : $\frac{x+4}{x+2} - \frac{x-1}{x-2}$ को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : $$\frac{x+4}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+4)(x-2) - (x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x - 8) - (x^2 + x - 2)}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x-6}{x^2-4}$$

उदाहरण 14 : यदि $A=\frac{2x+1}{2x-1}$ और $B=\frac{2x-1}{2x+1}$ है, तब $A-B$ को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल : $$A-B = \frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{4x^2+4x+1-4x^2+4x-1}{4x^2-1}$$

$$= \frac{8x}{4x^2-1}$$

उदाहरण 15 : सरल कीजिए : $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$

हल : $$\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)-2(x-1)(x+1)+(x+3)x}{(x-1)x(x+1)}$$

[हर को $(x-1)$, x तथा $(x+1)(x-1)$ का LCM लेने पर]

$$= \frac{3x^2+3x-2x^2+2+x^2+3x}{(x-1)x(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+6x+2}{x^3-x}$$

उदाहरण 16 : सरल कीजिए: $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{4x}{x^2+1}$

हल : दिए गए व्यंजक को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{4x}{x^2+1}$$

$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}-\frac{4x}{x^2+1}$$

$$=\frac{4x}{x^2-1}-\frac{4x}{x^2+1}$$

$$=\frac{4x(x^2+1)-4x(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{8x}{x^4-1}$$

उदाहरण 17 : $\dfrac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$ में से कौन-सा परिमेय व्यंजक घटाया जाए कि $\dfrac{x-1}{x-2}$ प्राप्त हो?

हल : मान लीजिए कि वांछित परिमेय व्यंजक $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ है। तब,

$$\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}-\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore \quad \frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}-\frac{x-1}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-7}{(x+3)(x-2)}-\frac{x-1}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-7-(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-7-(x^2+2x-3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-4}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{x+3}$$

अत:, अभीष्ट परिमेय व्यंजक $\frac{x+2}{x+3}$ है।

उदाहरण 18 : निम्न को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{2x+1}\right) + \left(\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2}\right)$$

हल : हमें प्राप्त है :

$$\frac{2x-1}{x-1} - \frac{x+1}{2x+1} = \frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)} \qquad (1)$$

और $$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)-(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{(x^2-3x+2)-(x^2+3x+2)}{(x^2-4)}$$

$$= \frac{-6x}{x^2-4} \qquad (2)$$

इसलिए,

$$\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\left(\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$=\frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{-6x}{(x^2-4)} \qquad \text{[(1) और (2) से]}$$

$$=\frac{3x^4-12x^2-6x(2x^2-x-1)}{(x-1)(2x+1)(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x^4-12x^2-12x^3+6x^2+6x}{(2x^2-x-1)(x^2-4)}$$

$$=\frac{3x^4-12x^3-6x^2+6x}{2x^4-x^3-9x^2+4x+4}$$

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक-युग्मों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x-2}{x+3}, \frac{x+2}{x+3}$ (ii) $\frac{x+2}{x-2}, \frac{x-2}{x+2}$

(iii) $\frac{x+1}{x+2}, \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (iv) $\frac{3\sqrt{2}x+1}{3x^2}, \frac{-2\sqrt{2}x+1}{2x^2}$

2. निम्नलिखित को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $x-\frac{1}{x}$ (ii) $(x+1)+\frac{2x}{x^2+2}$

(iii) $\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{2}{x}$ (iv) $\frac{x^3+2}{3x^2}+\frac{x^2+2}{3x^2}$

(v) $\frac{2x^2+3}{x-4}-\frac{x^2+1}{x-4}$

3. निम्न का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$ और $\frac{x+1}{x^3+2}$

(ii) $\frac{x-3}{x^2+1}$ और $\frac{x^2+1}{x-3}$

4. निम्न को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}-\frac{1}{x^2+2}$ (ii) $\frac{x-2}{(x+3)^2}-\frac{x+2}{2(x^2-9)}$

(iii) $\frac{4x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$ (iv) $\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right]-\frac{3x^2}{x-1}$

5. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के निम्नतम रूप में सरलीकृत कीजिए :

(i) $\frac{x^2+8x+12}{x^2-7x+12}+\frac{x^2+4x-12}{x-4}$

(ii) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}-\frac{x^2-2x-3}{x+1}$

6. निम्नलिखित व्यंजकों को परिमेय व्यंजकों के निम्नतम रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x^2-5x+6}$

(ii) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}$

7. $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ में कौन-सा परिमेय व्यंजक जोड़ा जाए कि $\frac{2x^2-x^2+3}{x^2+2}$ प्राप्त हो?

8. $\frac{7x}{x^2+x-12}$ में से कौन-सा परिमेय व्यंजक घटाया जाए कि $\frac{4}{x+4}$ प्राप्त हो?

9. $\frac{x^4-3x+1}{x+3}$ में कौन-सा परिमेय व्यंजक जोड़ा जाए कि $\frac{x^2+1}{x-2}$ प्राप्त हो?

10. सरल कीजिए: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{4}{x^4+1}$

[**संकेत**: $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$; अब अगले पद को जोड़िए आदि।]

11. निम्नलिखित को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\left(\frac{x^2+3x+2}{x+4}+\frac{x-6}{x+2}\right)-\left(\frac{x^3+x^2+2}{x^2+6x+8}+\frac{x^2-8}{x^2+6x+8}\right)$$

12. सरल कीजिए :

(i) $\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}+\frac{8x^3}{1-x^4}$

(ii) $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{1-x^2}$

(iii) $\frac{x+3}{2x^2+9x+9}+\frac{1}{2(2x-3)}-\frac{4x}{4x^2-9}$

3.4 परिमेय व्यंजकों का गुणन

यदि $\frac{a}{b}$ एवं $\frac{c}{d}$ दो परिमेय संख्याएँ हों, तो उनके गुणनफल को हम

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

के द्वारा व्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार, दो परिमेय व्यंजकों $\frac{p(x)}{q(x)}$ एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ के गुणनफल को

$$\frac{p(x)}{q(x)}\times\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)r(x)}{q(x)s(x)}$$

के रूप में व्यक्त करते हैं।

हम देख सकते हैं कि दो परिमेय व्यंजकों का गुणनफल भी एक परिमेय व्यंजक होता है।

उदाहरण 19 : $\dfrac{x^2-1}{x+2}$ एवं $\dfrac{3x+1}{x^2-6}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\frac{x^2-1}{x+2}\times\frac{3x+1}{x^2-6}=\frac{(x^2-1)(3x+1)}{(x+2)(x^2-6)}$$

$$=\frac{3x^3+x^2-3x-1}{x^3+2x^2-6x-12}$$

उदाहरण 20 : परिमेय व्यंजकों

$$\frac{x^2-7x+10}{(x-4)^2} \text{ एवं } \frac{x^2-7x+12}{x-5}$$

का गुणन कीजिए एवं गुणनफल को उसके निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\dfrac{x^2-7x+10}{(x-4)^2}\times\dfrac{x^2-7x+12}{x-5}$

$$=\frac{(x^2-7x+10)\times(x^2-7x+12)}{(x-4)^2\times(x-5)}$$

$$=\frac{(x-2)(x-5)\times(x-3)(x-4)}{(x-4)(x-4)(x-5)}$$

अंश एवं हर का HCF, $(x-5)(x-4)$ है। HCF का निरसन करने पर, हमें निम्नतम पदों में निम्न गुणनफल प्राप्त होता है :

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-4} \text{ अर्थात } \frac{x^2-5x+6}{x-4}$$

उदाहरण 21 : सरल कीजिए :

$$\left\{\frac{2x^2+3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}\right\}\times\frac{x^2-1}{3x}$$

हल : $\left\{\frac{2x^2+3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}\right\}\times\frac{x^2-1}{3x}$

$$=\left\{\frac{(2x^2+3)(x+1)+(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\right\}\times\frac{x^2-1}{3x}$$

$$=\frac{2x^3+2x^2+3x+3+x^2-x+3x-3}{(x-1)(x+1)}\times\frac{x^2-1}{3x}$$

$$=\frac{2x^3+3x^2+5x}{x^2-1}\times\frac{x^2-1}{3x}$$

$$=\frac{2x^2+3x+5}{3}$$

उदाहरण 22 : यदि $m=\frac{x+1}{x-1}$ एवं $n=\frac{x-1}{x+1}$ है, तब m^2+n^2-mn का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $m^2+n^2-mn=(m+n)^2-2mn-mn$

$$=(m+n)^2-3mn$$

$$=\left[\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}\right]^2-3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$=\left[\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right]^2-3$$

$$=\left[\frac{2x^2+2}{x^2-1}\right]^2-3$$

$$=\frac{4x^4+8x^2+4}{x^4-2x^2+1}-3$$

$$=\frac{x^4+14x^2+1}{x^4-2x^2+1}$$

टिप्पणी : हम $m^2 + n^2 - mn$ में m एवं n के मान सीधे भी रख सकते हैं।

3.5 परिमेय व्यंजकों का विभाजन

प्रत्येक शून्येतर परिमेय व्यंजक $\frac{p(x)}{q(x)}$ $[p(x) \neq 0]$ के संगत $\frac{q(x)}{p(x)}$ एक ऐसा परिमेय व्यंजक होता है कि

$$\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{p(x)q(x)}{q(x)p(x)} = 1 \text{ हो।}$$

तब, $\frac{q(x)}{p(x)}$ को $\frac{p(x)}{q(x)}$ का *व्युत्क्रम* (*reciprocal*) या (*गुणनात्मक प्रतिलोम*) (*multiplicative inverse*) कहते हैं।

हमें ज्ञात है कि एक शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने का अर्थ होता है उसके व्युत्क्रम से गुणा करना। उसी प्रकार शून्येतर परिमेय व्यंजक से भाग देने का अर्थ होता है उसके व्युत्क्रम से गुणा करना।

मान लीजिए कि $\frac{p(x)}{q(x)}$ एक परिमेय व्यंजक है एवं $\frac{r(x)}{s(x)}$ एक शून्येतर परिमेय व्यंजक है, अर्थात् $r(x) \neq 0$ है। तब,

$$\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{s(x)}{r(x)} = \frac{p(x)s(x)}{q(x)r(x)}$$

ध्यान दीजिए $q(x) \neq 0$ एवं $r(x) \neq 0$ हैं, इसलिए $q(x)r(x) \neq 0$ होगा। अतः $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{r(x)}{s(x)}$ एक परिमेय व्यंजक है।

उदाहरण 23 : निम्नलिखित परिमेय व्यंजकों के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ (ii) $\frac{-2x}{x^2-1}$

हल : (i) $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ का व्युत्क्रम $\frac{x-1}{x^2+x+1}$ है।

(ii) $\frac{-2x}{x^2-1}$ का व्युत्क्रम $\frac{1-x^2}{2x}$ है।

उदाहरण 24 : निम्नलिखित को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{x-7}{x^2+2x+3}$$

हल :
$$\frac{x+3}{x^2-1} \div \frac{x-7}{x^2+2x+3} = \frac{x+3}{x^2-1} \times \frac{x^2+2x+3}{x-7}$$

$$= \frac{(x+3)\times(x^2+2x+3)}{(x^2-1)(x-7)}$$

$$= \frac{x^3+5x^2+9x+9}{x^3-7x^2-x+7}$$

उदाहरण 25 : $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ को निम्नतम पदों के एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल :
$$\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{x^2-1}{x^2-25} \times \frac{x^2+4x-5}{x^2-4x-5}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-5)(x+5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$$

उदाहरण 26 : निम्नलिखित को निम्नतम पदों के एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\left[\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+4}{x+1}\right] \div \frac{3x+2}{x^2-1}$$

हल :

$$\left[\frac{2x^2+3}{x-1}+\frac{x+4}{x+1}\right]\div\frac{3x+2}{x^2-1}$$

$$=\frac{(2x^2+3)(x+1)+(x+4)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\div\frac{3x+2}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x^3+3x^2+6x-1}{(x^2-1)}\times\frac{x^2-1}{3x+2}\ \text{(क्यों?)}$$

$$=\frac{2x^3+3x^2+6x-1}{3x+2}$$

प्रश्नावली 3.4

1. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक-युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5x-3}{5x+2}, \frac{x+2}{x+6}$ (ii) $\frac{x^2+1}{x-1}, \frac{x+1}{x^2-x+1}$

(iii) $\frac{x^3+3}{x-1}, \frac{x-1}{2x}$ (iv) $\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{8}}{x^2+4}, \frac{\sqrt{8}x-\sqrt{32}}{x+3}$

2. निम्नलिखित परिमेय व्यंजक-युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए और परिणाम को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

(i) $\frac{x-3}{x-4}, \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$ (ii) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}, \frac{x^2-2x-24}{x^2-16}$

(iii) $\frac{x^3-27}{x^2+5x+6}, \frac{x+3}{x^2+3x+9}$ (iv) $\frac{6x^2-x-2}{8x^2+6x+1}, \frac{12x^2-13x-4}{12x^2-25x+12}$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में से प्रत्येक को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(x+2)+\frac{3x+2}{x+2}\times\frac{2x^2-7}{x-4}$ (ii) $\left(1+\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{x}{1+x}-1\right)\div\frac{1+x^2}{1-x^2}$

(iii) $\left[\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}-\frac{4x}{x^2+1}\right]\times\frac{x^4-1}{4x}$

4. $\frac{x^2-1}{x+4} \div \frac{x^2+2x+1}{2x-7}$ को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

5. निम्नलिखित व्यंजकों को निम्नतम पदों के परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{x^2+x+1}{x^2-9} \div \frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$

(ii) $\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-9}$

(iii) $\frac{3x^2+14x-5}{x^2-3x+2} \div \frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}$

(iv) $\frac{2x^2+x-3}{(x-1)^2} \div \frac{2x^2+5x+3}{x^2-1}$

6. निम्नलिखित व्यंजक को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\left(\frac{2x^2+3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1}\right) \div \frac{x^2-1}{3x}$$

7. सरल कीजिए : $\left(\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{3}{x^2+x-2}\right) \div \frac{4}{x^2-4x+3}$

8. यदि $a = x + \frac{1}{x}$ हो, तब $a + \frac{1}{a}$ को एक परिमेय व्यंजक के रूप में व्यक्त कीजिए।

9. यदि $r = \frac{x^2+2}{x-3}$; $s = \frac{x-1}{x}$ हों, तो निम्नलिखित को परिमेय व्यंजकों के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $r+s$ (ii) $r-s$ (iii) $r \cdot s$ (iv) $r \div s$

अध्याय

द्विघात समीकरण

4.1 भूमिका

अभी तक आपने एक और दो चरों में रैखिक समीकरणों का अध्ययन किया है। आपने देखा है कि हमारे दैनिक जीवन में विद्यमान विभिन्न समस्याओं को सुलझाने में रैखिक समीकरण तथा रैखिक समीकरणों के निकाय किस प्रकार हमारी सहायता करते हैं। किंतु निम्नलिखित प्रकारों की कुछ समस्याएँ ऐसी हैं जिनका समाधान अकेले रैखिक समीकरणों के उपयोग द्वारा संभव नहीं है :

(1) एक हॉल की लंबाई उसकी चौड़ाई से 5 मीटर अधिक है। यदि हॉल के फर्श का क्षेत्रफल 84 वर्ग मीटर है, तो हॉल की लंबाई और चौड़ाई कितनी हैं?

(2) किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई 25 सेंटीमीटर है। उसकी अन्य दो भुजाओं का अंतर 5 सेंटीमीटर है। इन भुजाओं की लंबाइयाँ कितनी हैं?

ऐसी समस्याओं के समाधान हेतु, हम कुछ ऐसे समीकरणों का उपयोग करते हैं जो रैखिक नहीं हैं। इस अध्याय में, हम ऐसे ही समीकरणों की चर्चा करेंगे जिन्हें हम *द्विघात समीकरण* (*quadratic equations*) कहेंगे।

4.2 द्विघात बहुपद

आप कुछ व्यंजकों जैसे $8x, z^2 - x^2, 3x^3 + 7x^2, y^2 + 3xy + 2x^2, y^3 - 8y^2 + 1,$ आदि से, जिन्हें बहुपद कहा जाता है, पहले से ही परिचित हैं। $8x, 3x^3 + 7x^2, y^3 - 8y^2 + 1,$ आदि *एक चर में बहुपदों* के उदाहरण हैं, जबकि $z^2 - x^2, y^2 + 3xy + 2x^2$ आदि *दो चरों में बहुपदों* के उदाहरण हैं। $x + \frac{1}{x}$, $x^2 + \sqrt{x} + 2$ आदि ऐसे व्यंजक हैं जो बहुपद नहीं हैं।

यहाँ पर हम अपनी परिचर्चा एक चर वाले बहुपदों तक ही सीमित रखेंगे।

बहुपद की घात (degree), उसमें प्रयुक्त चर का सबसे बड़ा घातांक (एक पूर्ण संख्या) होती है। उदाहरणार्थ, बहुपद $8x$ की घात 1 है, $\sqrt{2}x^2+3x$ की घात 2 है तथा y^3-8y^2+1 की घात 3 है। बहुपद '5' की घात 0 (शून्य) है। (क्यों ?)

सरलतम बहुपद वे हैं जिनमें एक पद होता है, जैसे $8x$, 16, $\sqrt{3}y^2$, $\frac{1}{2}z^2$ आदि। इन्हें *एकपदी (monomials)* कहा जाता है। $3x+2, x^2-3,$ आदि प्रकार के बहुपद जिनमें दो पद होते हैं, *द्विपद (binomials)* कहलाते हैं। तीन पदों वाले बहुपद *त्रिपद (trinomials)* कहलाते हैं। $x^2+3x+2, y^2+9y+\frac{1}{2}, z^2+3z+\frac{\sqrt{3}}{2},$ आदि त्रिपदों के उदाहरण हैं।

एक घात वाले बहुपद को *रैखिक बहुपद (linear polynomial)* तथा दो घात वाले बहुपद को *द्विघात बहुपद (quadratic polynomial)* कहा जाता है। इस अध्याय में, हम आगे की परिचर्चा द्विघात बहुपदों तक ही सीमित रखेंगे।

द्विघात बहुपदों के कुछ उदाहरण हैं :

$$x^2+2,\ 2x^2+3x-4,\ x^2-\sqrt{2}x,\ \sqrt{3}x^2+x-7, \text{ आदि।}$$

ध्यान दीजिए कि इन बहुपदों में से प्रत्येक के गुणांक वास्तविक संख्याएँ हैं। एक द्विघात बहुपद में अधिकतम तीन पद, यथा वे पद जिनमें x^2, x तथा अचर पद समाहित हैं, हो सकते हैं।

x में द्विघात बहुपद का व्यापक रूप है :

$$ax^2+bx+c$$

जिसमें a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है।

इस पूरे अध्याय में, x को एक वास्तविक चर के रूप में लिया जाएगा, अर्थात् द्विघात बहुपद में x का मान कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। हम द्विघात बहुपद को $p(x), q(x), r(x),$ आदि द्वारा व्यक्त कर सकते हैं।

4.3 द्विघात बहुपद के शून्यक

याद कीजिए कि यदि एक रैखिक बहुपद $ax+b$ दिया हो, जिसमें a, b वास्तविक संख्याएँ हों तथा $a \neq 0$ हो, तो हम x का एक मान, मान लीजिए α, ज्ञात कर सकते हैं ताकि $a\alpha+b=0$ हो, अर्थात् $\alpha = -\frac{b}{a}$ हो। α को इस रैखिक बहुपद का *शून्यक (zero)* कहा जाता है।

इसे संगत समीकरण $ax+b=0$ का *मूल* या *हल* भी कहा जाता है। हम देखते हैं कि इस स्थिति में केवल एक ही मूल है।

अब हम x में एक द्विघात बहुपद, मान लीजिए,

$$p(x)=x^2+x-2$$

पर विचार करते हैं।

हम x के कुछ वास्तविक मान प्रतिस्थापित करते हैं तथा $p(x)$ के संगत मान ज्ञात करते हैं।

x	$p(x)$
0	–2
–1	–2
1	0
–2	0
2	4

इस प्रकार, प्रयत्न और भूल विधि से, हमें x के दो मान ($x=1$ तथा $x=-2$) प्राप्त हुए जिनके लिए द्विघात बहुपद x^2+x-2 का मान शून्य हो जाता है। आगे चलकर हम पाएँगे कि x के केवल यही दो मान हैं जिनके लिए उपर्युक्त $p(x)$ का मान शून्य है। इन मानों में से प्रत्येक को बहुपद का एक *शून्यक* कहा जाता है, अर्थात् 1 और –2 द्विघात बहुपद x^2+x-2 के शून्यक हैं। इससे हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है:

यदि $x=\alpha$, जहाँ α एक वास्तविक संख्या है, के लिए द्विघात बहुपद ax^2+bx+c का मान शून्य हो, तो α को ax^2+bx+c का एक शून्यक कहा जाता है।

यह एक तथ्य है कि प्रत्येक द्विघात बहुपद के अधिकतम दो शून्यक हो सकते हैं। यहाँ इस बात को ध्यानपूर्वक देखा जा सकता है कि कुछ द्विघात बहुपदों के कोई वास्तविक शून्यक नहीं होते हैं। या यह कहिए कि x का कोई ऐसा वास्तविक मान नहीं होता जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो जाए। उदाहरण के लिए, द्विघात बहुपद x^2+1 पर विचार कीजिए। x का कोई ऐसा वास्तविक मान नहीं है जो x^2+1 को शून्य बना सके, क्योंकि x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए $x^2\geq 0$ है; जिससे मिलता है कि $x^2+1>0$ है। इसी प्रकार, कुछ द्विघात बहुपद ऐसे हैं जिनका केवल एक शून्यक है, अर्थात् x का केवल एक वास्तविक मान ऐसा है जिसके लिए बहुपद का मान शून्य होता है। उदाहरण के लिए, द्विघात बहुपद x^2-2x+1 पर विचार कीजिए। x का केवल एक मान ($x=1$) ऐसा है जिसके लिए x^2-2x+1 शून्य होता है, क्योंकि $x^2-2x+1=(x-1)^2$ तथा x के 1 के अतिरिक्त सभी मानों के लिए $(x-1)^2>0$ है।

अब प्रश्न उठता है कि हम द्विघात बहुपद के शून्यक कैसे ज्ञात करें। यह एक महत्त्वपूर्ण प्रश्न है तथा इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य इस प्रश्न का उत्तर खोजना है।

याद कीजिए कि रैखिक बहुपद $ax + b$, जबकि a, b वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है, का शून्यक संगत रैखिक समीकरण

$$ax + b = 0$$

के हल करने पर प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$, जिसमें a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है, के शून्यक संगत समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

जिसे *द्विघात समीकरण* (*quadratic equation*) कहते हैं, के हल करने पर प्राप्त होते हैं। यदि वास्तविक संख्याएँ α तथा β द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं, तो हम कह सकते हैं कि α तथा β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के *मूल* या *हल* हैं।

किसी समीकरण के मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया को *समीकरण का हल करना* कहा जाता है। यहाँ हम द्विघात समीकरणों के हल करने पर ही मुख्यत: अपना ध्यान केंद्रित करेंगे।

4.4 द्विघात समीकरण

ऊपर आपने देखा है कि द्विघात बहुपदीय समीकरणों को सामान्यत: द्विघांत समीकरण कहते हैं। *द्विघात समीकरण का व्यापक रूप है* :

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है।

क्योंकि $a \neq 0$ है, अत: सामान्यत: द्विघात समीकरण निम्नलिखित प्रकार के होते हैं :

(i) $b = 0, c \neq 0$, अर्थात् $ax^2 + c = 0$

(ii) $b \neq 0, c = 0$, अर्थात् $ax^2 + bx = 0$

(iii) $b = 0, c = 0$, अर्थात् $ax^2 = 0$

(iv) $b \neq 0, c \neq 0$, अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$

इस प्रकार, $5x^2 = 125$, $2x^2 + 3x = 0$, $6x^2 = 0$ तथा $x^2 + 5x + 4 = 0$, ऊपर दिए गए प्रत्येक द्विघात समीकरणों के उदाहरण हैं।

उदाहरण 1 :जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरण द्विघात समीकरण हैं :

(i) $(x-2)(x+3)+1=0$

(ii) $(x+4)(x-4)=x(x+2)+8$

(iii) $6-x(x^2+2)=0$

हल : (i) $(x-2)(x+3)+1=0$ को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$x^2+3x-2x-6+1=0 \text{ या } x^2+x-5=0$$

क्योंकि यह $ax^2+bx+c=0$ के रूप में है, अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण है।

(ii) दिए गए समीकरण को हम लिख सकते हैं :

$$x^2-16=x^2+2x+8$$

इसे सरल करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2x+24=0$$

या $$x+12=0$$

जो कि एक रैखिक समीकरण है।

अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

(iii) क्योंकि $6-x(x^2+2)=6-x^3-2x$ है, अत: दिया गया समीकरण निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$-x^3-2x+6=0$$

या $$x^3+2x-6=0$$

स्पष्ट है कि यह द्विघात समीकरण नहीं है। अत: दिया गया समीकरण द्विघात समीकरण नहीं है।

उदाहरण 2 :द्विघात समीकरण $2x^2-5x-3=0$ के लिए निर्धारित कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन से इसके हल हैं :

(i) $x=3$ (ii) $x=2$ (iii) $x=-\frac{1}{2}$

हल :(i) दिए गए समीकरण के बाएँ पक्ष में $x=3$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\text{बायाँ पक्ष} = 2x^2-5x-3$$

$= 2(3)^2 - 5(3) - 3$

$= 18 - 15 - 3$

$= 0 =$ दायाँ पक्ष

अतः, $x = 3$ दिए गए समीकरण का एक हल है।

(ii) दिए गए समीकरण के बाएँ पक्ष में $x = 2$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

बायाँ पक्ष $= 2(2)^2 - 5(2) - 3$

$= 8 - 10 - 3$

$= -5$

$\neq 0$

अर्थात् बायाँ पक्ष $\neq$ दायाँ पक्ष

अतः, $x = 2$ दिए गए समीकरण का हल नहीं है।

(iii) दिए गए समीकरण के बाएँ पक्ष में $x = -\frac{1}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

बायाँ पक्ष $= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 3$

$= \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3$

$= 0$

$=$ दायाँ पक्ष

अतः, $x = -\frac{1}{2}$ दिए गए समीकरण का एक हल है।

प्रश्नावली 4.1

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समीकरणों में कौन-से द्विघात समीकरण हैं :

1. $x^2 - 6x - 4 = 0$

2. $3x^2 - 7x - 2 = 0$

3. $x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

4. $7x = 2x^2$

5. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2\ (x \neq 0)$

6. $3x^2 - 4 = 0$

7. $(x+1)(x+3)=0$

8. $(2x+1)(3x+2)=6(x-1)(x-2)$

9. $x+\frac{1}{x}=x^2\,(x\neq 0)$

10. $16x^2-3=(2x+5)(5x-3)$

निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए कि x का दिया गया मान समीकरण का हल है अथवा नहीं :

11. $3x^2-2x-1=0\,;\,x=1$

12. $2x^2-6x+3=0\,;\,x=\frac{1}{2}$

13. $(2x+3)(3x-2)=0\,;\,x=\frac{2}{3}$

14. $x^2+x+1=0\,;\,x=-1$

निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए कि x के दिए गए दोनों मान समीकरण के हल हैं अथवा नहीं :

15. $x^2+6x+5=0\,;\,x=-1,x=-5$

16. $6x^2-x-2=0\,;\,x=-\frac{1}{2},x=\frac{2}{3}$

17. $x^2+\sqrt{2}x-4=0\,;\,x=\sqrt{2},x=-2\sqrt{2}$

18. $9x^2-3x-2=0\,;\,x=-\frac{1}{3},x=\frac{2}{3}$

19. $(x+4)(x-5)=0\,;\,x=-4,x=5$

20. $(3x+8)(2x+5)=0\,;\,x=2\frac{2}{3},x=2\frac{1}{2}$

4.5 गुणनखंडन द्वारा द्विघात समीकरण हल करना

आप बहुपदों के गुणनखंड करना पहले सीख चुके हैं। इस अनुच्छेद में, द्विघात समीकरणों के हल करने में गुणनखंडन की विधि प्रयुक्त की जाएगी। द्विघात समीकरणों को हल करने से पूर्व, हम निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण परिणाम का उल्लेख करते हैं :

यदि दो संख्याओं, मान लीजिए, a तथा b का गुणनफल शून्य है, अर्थात् $a\times b=0$, तो उनमें से कम से कम एक संख्या अवश्य शून्य होगी; अर्थात्

$$(1)\ a=0 \quad \text{या} \quad (2)\ b=0$$

इस प्रकार, यदि

$$(x-a)(x-b)=0$$

दिया हो, तो $x-a=0$ अर्थात् $x=a$, या फिर $x-b=0$ अर्थात् $x=b$ होगा।

उदाहरण 3 : हल कीजिए : $64x^2-625=0$

हल : दिया है $64x^2 - 625 = 0$

या $$(8x)^2 - (25)^2 = 0$$

या $$(8x+25)(8x-25) = 0$$

अर्थात् $8x + 25 = 0$ या $8x - 25 = 0$

इससे $x = -\frac{25}{8}$ या $\frac{25}{8}$ प्राप्त होता है।

अतः, $x = -\frac{25}{8}, \frac{25}{8}$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

उदाहरण 4 : द्विघात समीकरण

$$16x^2 - 24x = 0$$

को हल कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण को लिखा जा सकता है :

$$8x\,(2x - 3) = 0$$

इससे $x = 0$ या $x = \frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $x = 0, \frac{3}{2}$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 5 : हल कीजिए : $25x^2 - 30x + 9 = 0$

हल : $25x^2 - 30x + 9 = 0$ को लिख सकते हैं :

$$(5x)^2 - 2(5x) \times 3 + (3)^2 = 0$$

या $$(5x - 3)^2 = 0$$

इससे हमें $x = \frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ हल प्राप्त होते हैं।

अतः, $x = \frac{3}{5}$ अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6 : द्विघात समीकरण $x^2 + 6x + 5 = 0$ के हल ज्ञात कीजिए तथा हलों की जाँच कीजिए।

हल : द्विघात बहुपद $x^2 + 6x + 5$ का निम्न प्रकार से गुणनखंडन किया जा सकता है :

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 5x + x + 5$$
$$= x(x + 5) + 1\ (x + 5)$$
$$= x(x + 5)\ (x + 1)$$

अत: दिया गया द्विघात समीकरण निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$(x + 5)\ (x + 1) = 0$$

इससे $x = -5$ या $x = -1$ प्राप्त होता है।

अत:, $x = -1, -5$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

जाँच : हम दिए गए समीकरण में $x = -1$ तथा $x = -5$ प्रतिस्थापित करते हैं तथा जाँच करते हैं कि बायाँ पक्ष दाएँ पक्ष के बराबर आता है या नहीं।

(i) $(-1)^2 + 6(-1) + 5$
$= 1 - 6 + 5$
$= 0$

अत:, बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

(ii) $(-5)^2 + 6(-5) + 5$
$= 25 - 30 + 5$
$= 0$

अत:, बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अत:, ज्ञात किए गए हल सही हैं।

उदाहरण 7 : हल कीजिए : $6x^2 + x - 15 = 0$

हल : $6x^2 + x - 15 = 0$ समतुल्य है :

$$6x^2 + 10x - 9x - 15 = 0$$

या $$2x\ (3x + 5) - 3\ (3x + 5) = 0$$

या $$(3x + 5)\ (2x - 3) = 0$$

इससे $x = -\frac{5}{3}$ या $x = \frac{3}{2}$ प्राप्त होता है।

अर्थात् $x = -1\frac{2}{3},\ 1\frac{1}{2}$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 8 : हल कीजिए :

$$\frac{2x}{x-3}+\frac{1}{2x+3}+\frac{3x+9}{(x-3)(2x+3)} = 0$$

हल : स्पष्टत: दिया गया समीकरण तभी सत्य होगा, जबकि $x-3 \neq 0$ तथा $2x+3 \neq 0$ हों।

समीकरण के दोनों पक्षों को $(x-3)(2x+3)$ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$2x\,(2x+3) + 1\,(x-3) + 3x + 9 = 0$$

या $\quad 4x^2 + 10x + 6 = 0$

या $\quad 2x^2 + 5x + 3 = 0$

या $\quad (2x+3)(x+1) = 0$

किंतु $2x + 3 \neq 0$ है। इसलिए हम प्राप्त करते हैं :

$$x + 1 = 0 \quad \text{अर्थात्} \quad x = -1$$

अत:, दिए गए समीकरण का अभीष्ट एकमात्र हल $x = -1$ है।

प्रश्नावली 4.2

गुणनखंडन के उपयोग से निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक के हल ज्ञात कीजिए :

1. $9x^2 - 16 = 0$

2. $64x^2 - 9 = 0$

3. $(x-2)^2 - 25 = 0$

4. $(x+5)^2 - 36 = 0$

5. $(2y+3)^2 = 81$

6. $y^2 - 3 = 0$ [**संकेत** : $3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$]

7. $a^2z^2 - b^2 = 0$

8. $3z - z^2 = 0$

9. $5z^2 - 30 = 0$

10. $ax^2 - 2abx = 0$

11. $4y^2 + 4y + 1 = 0$

12. $y^2 - 8y + 16 = 0$

13. $z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$

14. $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$

15. $y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

16. $x^2 - 4qx + 4q^2 = 0$

17. $z^2 - 2z - 8 = 0$

18. $6z^2 - 5z - 21 = 0$

19. $y^2 + 3y - 18 = 0$

20. $y^2 - 3y - 10 = 0$

21. $6y^2 - y - 2 = 0$

22. $9y^2 - 3y - 2 = 0$

23. $5z^2 - 3z - 2 = 0$

24. $2z^2 + az - a^2 = 0$

25. $8x^2 - 22x - 21 = 0$

26. $5x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

27. $x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{8} = 0$

28. $x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$

29. $3x^2 + 10 = 11x$

30. $x + \frac{4}{x} = -4 \ (x \neq 0)$

31. $abx^2 + (b^2 - ac)\,x - bc = 0$

32. $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = 3\frac{1}{3} \ (x \neq 2, 4)$

33. $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \ (x \neq 3, -5)$

34. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} = 3 \ (x \neq 1, -2)$

4.6 पूर्ण वर्ग की विधि द्वारा द्विघात समीकरण हल करना : द्विघात सूत्र

बहुपदों के गुणनखंड करना तथा उपर्युक्त विधि से द्विघात समीकरण हल करना सदा सरल नहीं है। उदाहरण के लिए, द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 5 = 0$ पर विचार कीजिए। यदि हम बाएँ पक्ष के मध्य पद को तोड़ने की विधि के उपयोग से गुणनखंड करने की चेष्टा करें, तो हमें 5 के ऐसे दो पूर्णांक गुणनखंड ज्ञात करने होंगे जिनका योग 5 हो। किंतु 5 के ऐसे गुणनखंड 1 तथा 5 या –1 तथा –5 हैं। दोनों ही स्थितियों में योगफल 5 नहीं है। अत: गुणनखंडन के उपयोग से हम द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 5 = 0$ को हल करने में असमर्थ हैं। यहाँ हम ऐसे ही द्विघात समीकरणों को हल करने की एक विधि पर चर्चा करेंगे। आइए, निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 9 : हल कीजिए : $x^2 + 3x + 1 = 0$

हल : दिया है : $x^2 + 3x + 1 = 0$

हम $(\frac{1}{2} \times x$ का गुणांक$)^2$ को बाएँ पक्ष में जोड़ने तथा घटाने पर प्राप्त करते हैं :

$$x^2 + 3x + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

या $$x^2+2\left(\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=0$$

या $$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$$

या $$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

या $$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

इससे $x=\dfrac{-(3+\sqrt{5})}{2}$ या $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ प्राप्त होता है।

अत:, $x=-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

अब हम द्विघात समीकरण के व्यापक रूप, अर्थात् $ax^2+bx+c=0$, जिसमें a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$ है, का हल ज्ञात करते हैं।

दिया गया है :

$$ax^2+bx+c=0$$

दोनों पक्षों को a से $(a \neq 0)$ भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

बाएँ पक्ष में $(\frac{1}{2}\times x$ का गुणांक$)^2$ जोड़ने तथा घटाने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

या $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

यदि $b^2-4ac \geq 0$ है, तो $\sqrt{b^2-4ac}$ एक वास्तविक संख्या होगी।

इससे हमें प्राप्त होता है : $x+\frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

या $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

अर्थात् $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ दिए गए समीकरण के हल (या मूल) हैं।

यदि $b^2-4ac<0$ है, अर्थात् ऋणात्मक है, तो $\sqrt{b^2-4ac}$ वास्तविक संख्या नहीं होगी तथा इस स्थिति में समीकरण के कोई वास्तविक मूल नहीं होंगे।

टिप्पणी : यदि b^2-4ac ऋणात्मक है, तो "समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के कोई वास्तविक मूल नहीं हैं।" ऐसा कहने के स्थान पर हम सामान्य रूप से कहेंगे कि "समीकरण के मूल नहीं हैं।"

हमने देखा है कि यदि $b^2-4ac\geq 0$ है, तो द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल, माना α तथा β, वास्तविक होंगे तथा उनके मान होंगे :

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

'b^2-4ac' (D द्वारा निरूपित) को द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का *विविक्तकर* (*discriminant*) कहा जाता है।

परिणाम

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

या $$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

को प्राय: *द्विघात सूत्र* (*quadratic formula*) कहा जाता है। इसे सबसे पहले प्राचीन भारतीय गणितज्ञ *श्रीधराचार्य* ने 1025 ई० के लगभग प्रतिपादित किया था। इसलिए यह द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल ज्ञात करने के लिए *श्रीधराचार्य सूत्र* के नाम से जाना जाता है।

स्थिति 1 : जब $b^2 - 4ac = 0$, अर्थात् $b^2 = 4ac$ हो, तो

$$\alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = -\frac{b}{2a}$$

अर्थात् दोनों मूल बराबर हैं। हम कहते हैं कि समीकरण का मूल *पुनरावृत्त* (*repeated*) है।

स्थिति 2 : जब $b^2 - 4ac > 0$, अर्थात् $b^2 > 4ac$ हो, तो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो *भिन्न* (*distinct*) मूल, माना α तथा β होंगे जिनके मान नीचे दिए गए हैं :

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

उदाहरण 10 : निर्धारित कीजिए कि क्या निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल वास्तविक हैं। यदि हैं, तो उन्हें ज्ञात कीजिए :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(iii) $x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{2} = 0$

हल : (i) दिए गए समीकरण की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि यहाँ $a = 3, b = -5$ तथा $c = 2$ है।

अतः,
$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

क्योंकि विविक्तकर $D > 0$ है, इसलिए दिए गए समीकरण के दो भिन्न मूल, मान लीजिए α, β हैं जिनके मान नीचे दिए गए हैं :

$$\alpha = \frac{5 + \sqrt{1}}{6},\ \text{अर्थात् } 1$$

$$\beta = \frac{5 - \sqrt{1}}{6},\ \text{अर्थात् } \frac{2}{3}$$

इस प्रकार, दिए गए समीकरण के दो मूल 1 तथा $\frac{2}{3}$ हैं।

(ii) यहाँ $a=1, b=-4$ तथा $c=4$ है।

अत:, $$D=(-4)^2-4\times 1\times 4=16-16=0$$

अत:, समीकरण का पुनरावृत्त मूल है, जिसे हम $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ के उपयोग से,

$$-\left(\frac{-4}{2}\right)=2$$

प्राप्त करते हैं।

(iii) $$D=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\times1\times\frac{3}{2}=\frac{1}{9}-6=\frac{-53}{9}<0$$

क्योंकि $D<0$ है, अत: समीकरण के मूल वास्तविक नहीं हैं।

उदाहरण 11 : द्विघात समीकरण

$$x^2-7x-5=0$$

को हल कीजिए।

हल : दिए हुए समीकरण की $ax^2+bx+c=0$ से तुलना करने पर, हम पाते हैं :

$$a=1,\ b=-7 \text{ तथा } c=-5$$

अत:, $$\begin{aligned} D &= (-7)^2-4\times1\times(-5)\\ &=49+20\\ &=69\\ &>0\end{aligned}$$

क्योंकि D धनात्मक है, इसलिए दिए गए समीकरण के दो भिन्न मूल हैं :

$$\frac{7+\sqrt{69}}{2},\ \frac{7-\sqrt{69}}{2}$$

अर्थात् $x=\frac{7+\sqrt{69}}{2}, \frac{7-\sqrt{69}}{2}$ दिए गए समीकरण के हल हैं।

उदाहरण 12 : p का / के मान ज्ञात कीजिए जिसके / जिनके लिए द्विघात समीकरण $2x^2+px+8=0$ के मूल वास्तविक हों।

हल : समीकरण के मूल वास्तविक होने के लिए प्रतिबंध है :

$$D \geq 0$$

यहाँ,

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= p^2 - 4 \times 2 \times 8$$
$$= p^2 - 64$$

अतः, समीकरण के मूल वास्तविक होने के लिए,

$$p^2 - 64 \geq 0$$

या

$$p^2 \geq 8^2,$$

जिससे हमें प्राप्त होता है : $p \geq 8$ या $p \leq -8$

टिप्पणी : हम देखते हैं कि $p^2 - 8^2 \geq 0$

या

$$(p+8)(p-8) \geq 0 \qquad (1)$$

(1) सत्य होगा यदि

(i) $p + 8 \geq 0$ और $p - 8 \geq 0$.

अर्थात् $p \geq -8$ और $p \geq 8$ हो।

इन दोनों से हम प्राप्त करते हैं :

$$p \geq 8$$

या

(ii) $p + 8 \leq 0$ और $p - 8 \leq 0$

अर्थात् $p \leq -8$ और $p \leq 8$ हो।

इन दोनों से हम प्राप्त करते हैं :

$$p \leq -8$$

अतः, p के अभीष्ट मान हैं :

$$p \geq 8 \text{ या } p \leq -8$$

प्रश्नावली 4.3

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक का विविक्तकर लिखिए :

1. $x^2 + 4x + 1 = 0$

2. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

3. $4x^2 - ax + 2 = 0$

4. $x^2 + x + 1 = 0$

5. $\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$

6. $x^2 + 4x + b = 0$

जाँच कीजिए कि निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से किन समीकरणों के मूल हैं :

7. $2x^2 + x - 1 = 0$

8. $3x^2 + 2x - 1 = 0$

9. $x^2 + x + 1 = 0$

10. $x^2 + 4x + 4 = 0$

11. $x^2 + 5x + 5 = 0$

12. $2x^2 + 5x + 5 = 0$

ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से किन समीकरणों के मूल पुनरावृत्त हैं :

13. $x^2 + 6x + 9 = 0$

14. $z^2 - 6z + 6 = 0$

15. $2y^2 + 15y + 30 = 0$

16. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

17. $16y^2 - 40y + 25 = 0$

18. $9z^2 - 6z + 4 = 0$

निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए ज्ञात कीजिए कि द्विघात समीकरण के मूल हैं या नहीं। यदि हैं, तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

19. $y^2 - 4y - 1 = 0$

20. $y^2 - 6y + 2 = 0$

21. $y^2 + 8y + 4 = 0$

22. $y^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$

23. $2y^2 + 5y - 3 = 0$

24. $-2y^2 + y + 1 = 0$

25. $3y^2 + 9y + 4 = 0$

26. $5y^2 - 2y - 2 = 0$

27. $7z^2 + 8z + 2 = 0$

28. $z^2 + \frac{1}{2}z - 3 = 0$

29. $z^2 + 2z - 8 = 0$

30. $z^2 - 6z + 4 = 0$

31. $6x^2 + x - 2 = 0$

32. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

33. $2x^2 + 5\sqrt{3}\,x + 16 = 0$

34. $3x^2 + 2\sqrt{5}\,x - 5 = 0$

35. $\sqrt{7}y^2-6y-13\sqrt{7}=0$

36. $3y^2+(6+4a)y+8a=0$

37. $(x+4)(x+5)=3(x+1)(x+2)+2x$

38. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}\ (x\neq -1,-2,-4)$

निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए p का / के वह / वे मान ज्ञात कीजिए जिसके / जिनके लिए द्विघात समीकरण के मूल वास्तविक हैं :

39. $px^2+4x+1=0$

40. $2x^2+3x+p=0$

41. $5px^2-8x+2=0$

42. $4x^2+8x-p=0$

43. $x^2+px+1=0$

44. $4x^2-3px+9=0$

4.7 द्विघात समीकरणों के अनुप्रयोग

हमारे दैनिक जीवन में मिलने वाली अनेक समस्याओं के समाधान में द्विघात समीकरणों का उपयोग किया जाता है। संबंधित प्रश्न हल करने की विधियों में निम्नलिखित तीन चरण समाविष्ट होते हैं :

चरण 1 : शाब्दिक प्रश्न को सांकेतिक भाषा (गणितीय कथन) में परिवर्तित करना जिसका अभिप्राय यह है कि दिए गए प्रश्न में स्थित संबंधों की पहचान करना तथा उनके द्वारा द्विघात समीकरण बनाना।

चरण 2 : इस प्रकार निर्मित द्विघात समीकरण को हल करना।

चरण 3 : समीकरण के हल का विश्लेषण करना; जिसका अभिप्राय यह है कि परिणामी गणितीय कथन को शाब्दिक भाषा में परिवर्तित करना।

यह हो सकता है कि द्विघात समीकरण के दो मूलों में से केवल एक ही प्रश्न के लिए अर्थपूर्ण हो। द्विघात समीकरण के उस मूल को, जो दिए गए प्रश्न के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता, छोड़ दीजिए।

उदाहरण 13 : दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों के वर्गों का योग 545 है। इन पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 : (सांकेतिक भाषा में परिवर्तन)

मान लीजिए एक धनात्मक पूर्णांक x तथा दूसरा $x+1$ है।

क्योंकि पूर्णांकों के वर्गों का योग 545 है, अतः हम प्राप्त करते हैं :

$$x^2 + (x+1)^2 = 545$$

या $$2x^2 + 2x - 544 = 0$$

या $$x^2 + x - 272 = 0$$

चरण 2 : (द्विघात समीकरण हल करना)

$x^2 + x - 272 = 0$ समतुल्य है :

$$x^2 + 17x - 16x - 272 = 0$$

या $$x(x+17) - 16(x+17) = 0$$

या $$(x-16)(x+17) = 0$$

इससे $x = 16$ या $x = -17$ प्राप्त होता है।

चरण 3 : (विश्लेषण करना)

हमें $x = 16$ या $x = -17$ प्राप्त हुए। किंतु हमने x को धनात्मक पूर्णांक माना था। अतः, हम $x = -17$ को छोड़ देते हैं तथा $x = 16$ लेते हैं।

इस प्रकार, दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक 16 तथा $(16+1)$, अर्थात् 17 हैं।

जाँच : $16^2 + 17^2 = 256 + 289 = 545$

यह प्रश्न में दिए गए प्रतिबंध के अनुरूप है।

अतः, हल सही है।

उदाहरण 14 : एक हॉल की लंबाई उसकी चौड़ाई से 5 मीटर अधिक है। यदि हॉल के फर्श का क्षेत्रफल 84 वर्ग मीटर हो, तो हॉल की लंबाई तथा चौड़ाई क्या होंगी?

हल : मान लीजिए हॉल की चौड़ाई x मी है।

तब, हॉल की लंबाई $(x+5)$ मी होगी।

$\therefore$ फर्श का क्षेत्रफल $= x(x+5)$ मी^{2}

अतः, $$x(x+5) = 84$$

या $$x^2 + 5x - 84 = 0$$

या $(x+12)(x-7)=0$

इससे $x=7$ या $x=-12$ प्राप्त होता है।

क्योंकि हॉल की चौड़ाई ऋणात्मक नहीं हो सकती, अतः हम $x=-12$ को छोड़ देते हैं तथा केवल $x=7$ लेते हैं।

इस प्रकार, हॉल की चौड़ाई = 7 मीटर

तथा हॉल की लंबाई = (7 + 5) मीटर, अर्थात् 12 मीटर है।

जाँच : हॉल के फर्श का क्षेत्रफल = (12 × 7) मी^{2} = 84 मी^{2}

जो प्रश्न में दिए गए प्रतिबंध के अनुरूप है।

उदाहरण 15 : हे बालिके! हंसों के एक झुंड में से कुल संख्या के वर्गमूल का $\frac{7}{2}$ एक तालाब के किनारे खेल रहे हैं। शेष दो पानी में जलक्रीड़ा कर रहे हैं। हंसों की कुल संख्या कितनी है?

(*भास्कर*, जन्म 1114 ई०)

हल : मान लीजिए हम हंसों की कुल संख्या को x से प्रकट करते हैं।

तब, तालाब के तट पर खेलने वाले हंसों की संख्या = $\frac{7}{2}\sqrt{x}$

क्योंकि 2 बचे हुए हंस पानी में जलक्रीड़ा कर रहे हैं,

अतः $x = \frac{7}{2}\sqrt{x} + 2$

या $x - 2 = \frac{7}{2}\sqrt{x}$

या $(x-2)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 x$

या $4(x^2 - 4x + 4) = 49x$

या $4x^2 - 65x + 16 = 0$

या $4x^2 - 64x - x + 16 = 0$

या $4x(x-16) - 1(x-16) = 0$

या $(x-16)(4x-1)=0$

इससे हमें $x=16$ या $x=\frac{1}{4}$ प्राप्त होता है।

हम $x=\frac{1}{4}$ छोड़ देते हैं (क्यों?) तथा $x=16$ लेते हैं।

अतः, हंसों की कुल संख्या 16 है।

जाँच : $\frac{7}{2}\times 16$ का वर्गमूल $=14$

अर्थात् 14 हंस तालाब के किनारे खेल रहे हैं।

शेष हंस $=16-14=2$, जो प्रश्नानुसार ही है।

उदाहरण 16 : किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई 25 सेमी है। त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं की लंबाइयों का अंतर 5 सेमी है। इन भुजाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए छोटी भुजा की लंबाई x सेमी है।

तब, बड़ी भुजा की लंबाई $=(x+5)$ सेमी

क्योंकि त्रिभुज समकोण त्रिभुज है, अतः भुजाओं की लंबाइयों के वर्गों का योग कर्ण की लंबाई के वर्ग के बराबर होगा (पाइथागोरस प्रमेय)।

इस प्रकार, $x^2+(x+5)^2=25^2$

या $x^2+x^2+10x+25=625$

या $2x^2+10x-600=0$

या $x^2+5x-300=0$

या $(x+20)(x-15)=0$

इससे हमें $x=15$ या $x=-20$ प्राप्त होता है।

हम $x=-20$ को छोड़ रहे हैं (क्यों?) तथा $x=15$ ले रहे हैं।

इस प्रकार, छोटी भुजा की लंबाई $=15$ सेमी

बड़ी भुजा की लंबाई $=(15+5)$ सेमी, अर्थात् 20 सेमी

जाँच : कर्ण की लंबाई $=\sqrt{15^2+20^2}$ सेमी $=\sqrt{225+400}$ सेमी $=\sqrt{625}$ सेमी $=25$ सेमी

उदाहरण 17 : दो धनात्मक पूर्णांकों के वर्गों का योग 208 है। यदि बड़ी संख्या का वर्ग छोटी

संख्या के 18 गुने के बराबर हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए छोटी संख्या x है।

तब, प्रश्नानुसार बड़ी संख्या का वर्ग $18x$ होगा।

अतः, $x^2 + 18x = 208$

या $x^2 + 18x - 208 = 0$

या $(x-8)(x+26) = 0$

इससे हमें $x = 8$ या $x = -26$ प्राप्त होता है।

क्योंकि संख्याएँ धनात्मक पूर्णांक हैं, अतः हम $x = -26$ को छोड़ते हैं तथा $x = 8$ लेते हैं।

इस प्रकार, छोटी संख्या $= 8$

इसलिए बड़ी संख्या का वर्ग $= 18 \times 8 = 144$

इसलिए बड़ी संख्या $= \sqrt{144} = 12$

अतः, छोटी संख्या 8 तथा बड़ी संख्या 12 है।

जाँच : (i) $12^2 + 8^2 = 144 + 64 = 208$

(ii) $12^2 = 144 = 18 \times 8$

उदाहरण 18 : स्वाति शांत जल में अपनी नाव 5 किमी / घंटा की चाल से खे सकती है। य उसे धारा की दिशा के विपरीत 5.25 किमी जाने में, धारा की दिशा में लौटने की तुलना 1 घंटा समय अधिक लगता है, तो धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए धारा की चाल x किमी / घंटा है।

धारा की दिशा के विपरीत नाव की चाल $= (5 - x)$ किमी / घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल $= (5 + x)$ किमी / घंटा

धारा की दिशा के विपरीत 5.25 किमी जाने में लगने वाला समय,

मान लीजिए, t_1 (घंटों में) $= \dfrac{5.25}{5-x}$

धारा की दिशा में 5.25 किमी चलने में लगने वाला समय,

मान लीजिए, t_2 (घंटों में) $= \dfrac{5.25}{5+x}$

प्रत्यक्ष रूप से $t_1 > t_2$ है।

अतः, प्रश्न में दिए गए प्रतिबंध के अनुसार,

$$t_1 = t_2 + 1$$

या $$\frac{5.25}{5-x} = \frac{5.25}{5+x} + 1$$

या $$\frac{21}{4}\left(\frac{1}{5-x} - \frac{1}{5+x}\right) = 1$$

या $$21\left(\frac{5+x-5+x}{25-x^2}\right) = 4$$

या $$42x = 100 - 4x^2$$

या $$4x^2 + 42x - 100 = 0$$

या $$2x^2 + 21x - 50 = 0$$

या $$(2x + 25)(x - 2) = 0$$

इससे हम $x = 2$ प्राप्त करते हैं, क्योंकि हम $x = \frac{-25}{2}$ को छोड़ देते हैं। (क्यों?)

अतः, धारा की चाल 2 किमी / घंटा है।

जाँच : धारा के विपरीत नाव की चाल = (5 – 2), अर्थात् 3 किमी / घंटा

धारा की दिशा में नाव की चाल = (5 + 2), अर्थात् 7 किमी / घंटा

धारा के विपरीत 5.25 किमी जाने में लगने वाला समय = $\frac{5.25}{3}$ घंटा = 1.75 घंटा

धारा के साथ 5.25 किमी जाने में लगने वाला समय = $\frac{5.25}{7}$ घंटा = 0.75 घंटा

अंतर = 1.75 घंटा – 0.75 घंटा = 1 घंटा

उदाहरण 19 : प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग S निम्नलिखित संबंध द्वारा दर्शाया जाता है :

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

यदि योग 276 हो, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = 276$$

या $\quad n^2 + n - 552 = 0$

इससे हमें प्राप्त होता है :

$$n = \frac{-1+\sqrt{1+2208}}{2}, \frac{-1-\sqrt{1+2208}}{2}$$

या $\quad n = \frac{-1+\sqrt{2209}}{2}, \frac{-1-\sqrt{2209}}{2}$

या $\quad n = \frac{-1+47}{2}, \frac{-1-47}{2}$

या $\quad n = 23, -24$

हम $n = -24$ को छोड़ देते हैं, क्योंकि -24 प्राकृत संख्या नहीं है।

अत:, $n = 23$ है।

जाँच : प्रथम 23 प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{23 \times 24}{2} = 276$

प्रश्नावली 4.4

1. 12 को दो ऐसे भागों में विभक्त कीजिए जिनका गुणनफल 32 हो।

2. 12 को दो ऐसे भागों में विभक्त कीजिए जिनके वर्गों का योग 74 हो।

3. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम का योग $\frac{10}{3}$ है। संख्या / संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

4. एक आयत की एक भुजा उसकी दूसरी भुजा से 2 सेमी बड़ी है। यदि आयत का क्षेत्रफल 195 सेमी^{2} है, तो आयत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

5. किसी भिन्न का हर उसके अंश के दुगुने से एक अधिक है। यदि भिन्न तथा इसके व्युत्क्रम का योग $2\frac{16}{21}$ है, तो भिन्न ज्ञात कीजिए।

6. पाँच वर्ष पहले की रामू की आयु (वर्षों में) तथा 9 वर्ष बाद की आयु (वर्षों में) का गुणनफल 15 है। रामू की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

7. दो अंकों वाली एक संख्या ऐसी है कि उसके अंकों का गुणनफल 12 है। इस संख्या में 36 जोड़ने पर इसके अंकों के स्थान परस्पर बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

8. दो क्रमागत विषम प्राकृत संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 202 है।

9. दो क्रमागत सम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 100 है।

10. दो प्राकृत संख्याओं का योग 8 है। यदि उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{8}{15}$ हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. तीन क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ऐसे हैं कि प्रथम के वर्ग तथा अन्य दो के गुणनफल का योग 154 है। वे पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

12. विक्रम तीन लकड़ी की छड़ों से एक समकोण त्रिभुज बनाना चाहता है। समकोण त्रिभुज का कर्ण उसके आधार से 2 सेमी तथा शीर्षलंब से 4 सेमी बड़ा होना चाहिए। उसे लकड़ी की छड़ें कितनी लंबी लेनी चाहिए?

13. एक समकोण त्रिभुज के आकार के घास के मैदान का कर्ण उसकी सबसे छोटी भुजा के दुगुने से एक मीटर बड़ा है। यदि उसकी तीसरी भुजा सबसे छोटी भुजा से 7 मीटर बड़ी है, तो मैदान की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

14. दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 45 है। छोटी संख्या का वर्ग बड़ी संख्या के चार गुने के बराबर है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

15. पिता तथा उसके पुत्र की आयु का योग 45 वर्ष है। पाँच वर्ष पूर्व उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल 124 था। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

16. सारस पक्षियों में से एक चौथाई कमल के पौधों के आस-पास घूम रहे हैं। कुल संख्या का $\frac{1}{9}$ तथा उसी संख्या का $\frac{1}{4}$ एवं उसी संख्या के वर्गमूल के सात गुने मिलकर पहाड़ी पर घूम रहे हैं। शेष 56 पक्षी वकुल वृक्षों पर बैठे हैं। पक्षियों की कुल संख्या कितनी है?

(*महावीर*, 850 ई० लगभग)

17. एक किसान 100 मी^{2} क्षेत्रफल वाला आयताकार सब्जी का बगीचा बनाना चाहता है। क्योंकि उसके पास घेराबंदी के लिए कुल 30 मी लंबाई का कांटेदार तार है, इसलिए वह आयताकार बगीचे की तीन भुजाओं की घेराबंदी इस तार से करता है तथा चौथी भुजा की घेराबंदी के लिए अपने सहन की दीवार का उपयोग करता है। बगीचे की विमाएँ (dimensions) ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** यदि एक भुजा की लंबाई x मी हो, तो दूसरी भुजा $(30 - 2x)$ मी होगी। इसलिए $x(30-2x) = 100$]

18. एक समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई $3\sqrt{10}$ सेमी है। यदि इसकी छोटी भुजा को तीन गुना तथा बड़ी भुजा को दुगुना कर दिया जाए, तो नए समकोण त्रिभुज के कर्ण की लंबाई $9\sqrt{5}$ सेमी हो जाती है। त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ कितनी-कितनी हैं?

19. यदि एक छोटे वर्ग के क्षेत्रफल का दुगुना एक बड़े वर्ग के क्षेत्रफल में से घटाया जाए, तो परिणाम 14 सेमी^{2} प्राप्त होता है। किंतु यदि बड़े वर्ग के क्षेत्रफल का दुगुना छोटे वर्ग के क्षेत्रफल के तीन गुने में जोड़ा जाए, तो परिणाम 203 सेमी^{2} प्राप्त होता है। दोनो वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

20. मुंबई से पुणे तक की 192 किमी की दूरी तय करने में एक तेज चलने वाली गाड़ी एक धीरे चलने वाली गाड़ी से 2 घंटा कम समय लेती है। यदि धीरे चलने वाली गाड़ी की औसत चाल तेज चलने वाली गाड़ी की औसत चाल से 16 किमी / घंटा कम हो, तो प्रत्येक गाड़ी की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

21. यदि किसी सवारी गाड़ी की सामान्य चाल में 5 किमी / घंटा की वृद्धि कर दी जाए, तो यह 300 किमी की यात्रा तय करने में 2 घंटे कम समय लेती है। इसकी सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

22. एक तेज चलने वाली रेलगाड़ी 600 किमी की दूरी तय करने में एक धीरे चलने वाली गाड़ी से 3 घंटे कम समय लेती है। यदि धीरे चलने वाली गाड़ी की चाल तेज चलने वाली गाड़ी की चाल से 10 किमी / घंटा कम हो, तो इन गाड़ियों की चालें ज्ञात कीजिए।

23. एक विमान अपने निर्धारित समय से 30 मिनट देर से प्रस्थान करता है और 1500 किमी की दूरी पर स्थित अपने गंतव्य स्थान पर समय से पहुँचने के लिए, वह अपनी सामान्य चाल में 250 किमी / घंटा की वृद्धि करता है। विमान की सामान्य चाल ज्ञात कीजिए।

24. एक नाव को, जिसकी शांत जल में चाल 15 किमी / घंटा है, धारा की दिशा में 30 किमी जाने तथा फिर धारा की दिशा के विपरीत लौटने में कुल 4 घंटे 30 मिनट का समय लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

25. एक नाव को, जिसकी शांत जल में चाल 9 किमी / घंटा है, धारा की दिशा में 12 किमी जाने तथा फिर धारा की दिशा के विपरीत लौटने में कुल 3 घंटे का समय लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

26. 3 से आरंभ करके, n क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग S निम्नलिखित संबंध द्वारा दर्शाया जाता है :

$$S = n(n + 2)$$

यदि योग 168 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

27. प्रथम n क्रमागत सम प्राकृत संख्याओं का योग S निम्नलिखित संबंध द्वारा दर्शाया जाता है :

$$S = n(n + 1)$$

यदि योग 420 हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

अध्याय 5

समांतर श्रेढ़ी

5.1 भूमिका

इस अध्याय में, हम संख्याओं के एक रोचक प्रतिरूप (pattern) का अध्ययन करेंगे जिसमें कोई राशि उत्तरोत्तर किसी नियत मात्रा में बढ़ती या घटती चली जाती है। उदारहणतः, आपकी आयु प्रति वर्ष 12 मास बढ़ जाती है। वर्ष में प्रति सप्ताह बीतते दिनों की संख्या 7 दिन बढ़ जाती है। किसी निवेश (investment) पर साधारण ब्याज नियत अवधि के बाद एक नियत राशि से बढ़ता जाता है। जैसे-जैसे आप किसी वस्तु के मात्रकों की संख्या एक-एक कर बढ़ाते हैं, वैसे-वैसे उसका मूल्य एक नियत राशि से बढ़ता चला जाता है। दैनिक जीवन की ऐसी स्थितियों के अध्ययन के लिए, हम *समांतर श्रेढ़ी* (*arithmetic progression*) की अवधारणा का परिचय कराएंगे और फिर उसका अध्ययन करेंगे।

5.2 समांतर श्रेढ़ी

संख्याओं की निम्नलिखित सूचियों पर ध्यान दीजिए :

(i) 1, 4, 7, 10, 13, 16, . . .
(ii) 11, 16, 21, 26, 31, 36, . . .
(iii) – 4, 0, 4, 8, 12, 16, . . .
(iv) –12, –2, 8, 18, 28, 38, . . .
(v) 16, 8, 0, –8, –16, –24, . . .
(vi) 21, 6, –9, –24, –39, –54, . . .
(vii) 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, . . .

इन सभी सूचियों में भिन्न संख्याएँ हैं। परंतु वह *नियम* जो हमें इन सभी सूचियों का विस्तार करने में, या इनमें आगे पद जोड़ने में समर्थ बनाता है, एक ही है। सूची (i) में, पहली संख्या के अतिरिक्त, प्रत्येक संख्या पिछली संख्या में 3 जोड़ने पर प्राप्त होती है ($4 = 1 + 3$, $7 = 4 + 3$, $10 = 7 + 3$, . . .)। इसी भाँति, सूची (ii) में, पहली संख्या के अतिरिक्त, प्रत्येक संख्या पिछली

संख्या में 5 जोड़कर प्राप्त होती है। सूची (iii), – 4 से आरंभ होती है। अन्य संख्याएँ पिछली संख्या में 4 जोड़कर प्राप्त होती हैं। सूचियाँ (v) और (vi) पहली चार सूचियों से कुछ भिन्न हैं। इनमें पहली संख्या के बाद वाली संख्याएँ पिछली संख्या में से क्रमशः 8 और 15 घटाकर प्राप्त की जाती हैं। परंतु 8 घटाने का तात्पर्य है –8 जोड़ना आदि। अंतिम सूची में जोड़ी जाने वाली संख्या $\frac{1}{2}$ या 0.5 है। इस प्रकार, सभी सूचियाँ दो सार्व तथ्य प्रदर्शित करती हैं :

1. प्रत्येक सूची एक स्वेच्छा से चुनी गई संख्या से आरंभ होती है। (यह *आरंभिक या प्रथम संख्या* कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।)
2. सूची की प्रत्येक उत्तरोत्तर (successive) संख्या पिछली संख्या में एक ही नियत संख्या जोड़कर प्राप्त की जाती है। (यह *नियत संख्या* कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।)

यदि हम आरंभिक अर्थात् प्रथम संख्या को 'a' से व्यक्त करें, और जोड़ी जाने वाली नियत संख्या को 'd' से, तो ऊपर की प्रत्येक सूची को

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \ldots \qquad \text{(A)}$$

से व्यक्त किया जा सकता है।

$a = 1$ और $d = 3$ लेने पर सूची (i) प्राप्त होती है।

$a = 1$ और $d = 0.5$ लेने पर सूची (vii) प्राप्त होती है।

क्या ऊपर की सूचियाँ विभिन्न संख्याओं का क्रम बदलकर लिखी जा सकती हैं? उदाहरणतः, क्या (A) को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है?

$$a+2d, a, a+4d, a+3d, a+5d, a+d, \ldots$$

स्पष्टतः, उत्तर 'नहीं' है। क्योंकि यदि हम ऐसा करते हैं, तो प्रतिरूप नष्ट हो जाएगा; हम यह नहीं कह सकेंगे कि उत्तरोत्तर (प्रगामी) संख्याएँ पिछली संख्या में d जोड़कर प्राप्त की जाती हैं। अतः उत्तरोत्तर या प्रगामी संख्याओं का *क्रम महत्त्वपूर्ण* है। अतः ऊपर के प्रतिरूप को बनाए रखने के लिए यह अनिवार्य है कि

a प्रथम संख्या ही हो,

$a+d$ द्वितीय संख्या ही हो,

$a+2d$ तृतीय संख्या ही हो,

और इसी प्रकार आगे भी। इस प्रकार, ऊपर की सूचियाँ (i) से (vii) *इस अर्थ में क्रमित सूचियाँ हैं कि विभिन्न संख्याओं का क्रम परिवर्तित नहीं किया जा सकता।*

यदि आप संख्याओं का क्रम बदल देंगे, तो एक भिन्न सूची प्राप्त होगी; यह *वही सूची नहीं* होगी जिससे आपने प्रारंभ किया था। क्रमित सूची को एक अच्छी-सी संज्ञा देते हैं। इसे *अनुक्रम* (*sequence*) कहकर पुकारते हैं। इस प्रकार, सूचियाँ (i) - (vii) संख्याओं के अनुक्रम हैं। पर ध्यान रहे, यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक अनुक्रम (i) – (vii) जैसा ही हो। अनुक्रम अन्य प्रकार का भी हो सकता है। उदाहरणत:, निम्नलिखित सभी सूचियाँ अनुक्रम हैं :

$$1, 101, 1001, 10001, \ldots$$
$$5, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$$
$$1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4, \ldots$$

परंतु इस अध्याय में, केवल (i) से (vii) जैसे अनुक्रमों का ही अध्ययन किया जाएगा।

किसी अनुक्रम में आने वाली संख्याएँ उसके *पद* (*terms*) या *अवयव* (*elements*) कहलाती हैं। इस प्रकार, अनुक्रम

$$10, 20, 30, \ldots$$

में 10 पहला पद है, 20 दूसरा पद है और ऐसे ही आगे भी। सामान्यतया,

पहले पद को t_1, a_1, b_1 आदि से व्यक्त किया जाता है,

दूसरे पद को t_2, a_2, b_2 आदि से व्यक्त किया जाता है।

व्यापक रूप से, n वें पद को t_n, a_n, b_n आदि से व्यक्त किया जाता है।

अनुक्रम (i), अर्थात् 1, 4, 7, 10, . . . के लिए इस संकेतन का प्रयोग करने पर,

$$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 10, \ldots$$

ध्यान दीजिए कि

$$a_2 = a_1 + 3, \quad \text{जिससे} \quad a_2 - a_1 = 3,$$
$$a_3 = a_2 + 3, \quad \text{जिससे} \quad a_3 - a_2 = 3,$$
$$a_4 = a_3 + 3, \quad \text{जिससे} \quad a_4 - a_3 = 3,$$

और ऐसे ही आगे भी।

इस प्रकार, जब किसी अनुक्रम के विभिन्न पद पिछले पद में एक नियत संख्या (यहाँ 3) जोड़कर प्राप्त किए जाते हैं, तो क्रमागत उत्तरोत्तर पदों में अंतर इस नियत संख्या (यहाँ 3) के

बराबर होता है। ऊपर बताए गए (i) - (vii) जैसे अनुक्रम *समांतर श्रेढ़ी* (*arithmetic progressions*) या संक्षेप में, AP कहलाते हैं। उस नियत संख्या को, जिसे किसी भी पद को अपने से ठीक अगले पद में से घटाने पर प्राप्त होने वाले अंतर के रूप में देखा जा सकता है, इस AP का *सार्व अंतर* (*common difference*) कहा जाता है।

हम पहले ही देख चुके हैं कि

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ \ldots$$

a और d के विभिन्न मानों के लिए समांतर श्रेढ़ी (i) – (vii) को निरूपित करते हैं। वास्तव में यह प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाले AP का व्यापक रूप है। यदि आपको a और d ज्ञात हों, तो आपको AP के सभी पद ज्ञात हो जाते हैं।

दृष्टांत 1 : प्रथम पद 10 और सार्व अंतर 5 वाली AP

$$10, 15, 20, 25, 30, \ \ldots \text{ है।}$$

दृष्टांत 2 : प्रथम पद –100 और सार्व अंतर 30 वाली AP

$$-100, -70, -40, -10, 20, 50, 80, \ \ldots \text{ है।}$$

दृष्टांत 3 : प्रथम पद 1 और सार्व अंतर $\frac{1}{4}$ या 0.25 वाली AP

$$1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 2.25, 2.50, \ \ldots \text{ है।}$$

दृष्टांत 4 : प्रथम पद 2 और सार्व अंतर –1 वाली AP

$$2, 1, 0, -1, -2, -3, \ \ldots \text{ है।}$$

दृष्टांत 5 : AP : 25, 35, 45, 55, . . . , का प्रथम पद 25 है और इसका सार्व अंतर 10 है।

दृष्टांत 6 : AP : $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$, का प्रथम पद 2 और सार्व अंतर $-\frac{1}{2}$ है।

टिप्पणी : किसी AP का सार्व अंतर कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है। परंतु यहाँ हम केवल उन AP पर ही विचार करेंगे जिनका सार्व अंतर कोई परिमेय संख्या हो।

5.3 समांतर श्रेढ़ी का *n* वाँ पद

एक AP लीजिए जिसका प्रथम पद a और सार्व अंतर d है। इसके पदों को $a_1, a_2, a_3, \ldots$,

से व्यक्त करने पर, इसके उत्तरोत्तर पद होंगे

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a_1 + d = a + d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$$

अब प्रतिरूप स्पष्ट हो जाता है। दूसरा पद प्राप्त करने के लिए हम a में d का का योग करते हैं; तीसरा पद प्राप्त करने के लिए हम a में $2d$ का योग करते हैं और ऐसे ही आगे भी।

इन पदों को पुन: हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$a_1 = a + (1 - 1)\,d$$
$$a_2 = a + (2 - 1)\,d$$
$$a_3 = a + (3 - 1)\,d$$

और ऐसे ही आगे भी। अत: nवाँ पद इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$a_n = a + (n - 1)d \qquad (1)$$

सूत्र (1) से हम प्रथम पद a और सार्व अंतर d वाले AP का n वाँ (व्यापक) पद प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 1: समांतर श्रेढ़ी 7, 3, –1, –5, –9, ... का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

हल : याद कीजिए कि यदि हम किसी AP के प्रथम पद a में इसका सार्व अंतर d जोड़ दें, तो उसका दूसरा पद $a + d$ प्राप्त हो जाता है।

अत:, $d = (a + d) - a$ = दूसरा पद – पहला पद

$= 3 - 7$

$= -4$

इस प्रकार, सार्व अंतर – 4 है।

सत्यापन : $7 + (-4) = 3$ (दूसरा पद)

$3 + (-4) = -1$ (तीसरा पद)

$-1 + (-4) = -5$ (चौथा पद) आदि।

अत:, परिणाम सही है।

टिप्पणी : हम 7 और 3 के स्थान पर क्रमागत पद 3 और –1 लेकर, पहले की भाँति $-1 - 3 = -4$ प्राप्त कर सकते थे। परंतु आपको $(n + 1)$ वें पद में से ही nवें पद को घटाना आवश्यक है, भले ही $(n + 1)$ वाँ पद n वें पद से छोटा ही क्यों न हो।

उदाहरण 2: वह AP ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और जिसके सातवें पद में से पाँचवाँ पद घटाने पर 12 प्राप्त होता है।

हल : माना कि AP है :

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

तब $a_3 = a + 2d,$

$a_5 = a + 4d,$

और $a_7 = a + 6d$

जैसा कि दिया गया है कि $a_3 = 16$ है,

अर्थात् $a + 2d = 16$ (1)

और $a_7 - a_5 = 12$ है,

अर्थात् $(a + 6d) - (a + 4d) = 12$

या $2d = 12$ (2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है :

$$d = 6, a = 4$$

इस प्रकार, AP का प्रथम पद 4 और इसका सार्व अंतर 6 है। अतः, AP है :

$$4, 10, 16, 22, 28, 34, \ldots.$$

5.4 किसी AP के परिमित पदों का योगफल

सी. एफ. गॉस (C.F. Gauss) को महानतम गणितज्ञों मे से एक माना जाता है। जब वह छोटा ही था, तब एक दिन कक्षा के छात्रों को व्यस्त रखने के लिए, उसके अध्यापक ने सब छात्रों से 1 से 100 तक की संख्याओं का योग करने को कहा। गॉस ने अविलंब इसका उत्तर अध्यापक को दे दिया। बाद में अध्यापक यह देखकर विस्मित रह गए कि केवल गॉस का ही उत्तर सही था। [आप इन संख्याओं का योग करने का प्रयत्न कीजिए और देखिए कि आपको ऐसा करने में कितना समय लगता है। यह भी याद रखिएगा कि गॉस बहुत छोटा था, कक्षा X में नहीं।] गॉस ने निम्नलिखित सरल युक्ति का प्रयोग किया था :

योग $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$

$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1$

S के इन दो व्यंजकों के संगत पदों का ऊर्ध्वाधर योग करने पर,

$$2S = 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101 \text{ (सौ बार)}$$
$$= 100 \times 101$$

$$\therefore \qquad S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

गॉस से शिक्षा प्राप्त करते हुए, गॉस की ही युक्ति का प्रयोग कर, हम किसी AP के परिमित पदों का योगफल प्राप्त कर सकते हैं। संयोगवश क्या आपने ध्यान दिया कि 1, 2, 3, . . . , 100 एक AP है?

माना कि हम AP

$$a,\ a + d, a + 2d, \ldots$$

के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करना चाहते हैं।

इस AP का n वाँ पद $a + (n - 1)d$ है। n वें पद तक के योगफल को S_n से व्यक्त करने पर,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + \{a + (n - 2)d\} + \{a + (n - 1)d\} \qquad (1)$$

इसी योगफल को पुनः अंतिम पद से लिखना आरंभ कर, पहले पद पर समाप्त करने पर,

$$S_n = \{a + (n-1)d\} + \{a + (n-2)d\} + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1) और (2) का ऊपर की भाँति ऊर्ध्वाधर योग करने पर,

$$2S_n = \{2a + (n-1)d\} + \{2a + (n-1)d\} + \ldots + \{2a + (n-1)d\} + \{2a + (n-1)d\}$$

[n बार]

$$= n\{2a + (n-1)d\}$$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\} \qquad (A)$$

या $$S_n = n\left\{a + \frac{1}{2}(n-1)d\right\} \qquad (B)$$

(A) से प्राप्त होता है :

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{1}{2}n[a + \{a + (n-1)d\}]$$

अर्थात् $$S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad \text{(C)}$$

जहाँ $l = a + (n-1)d$, AP का अंतिम पद है।

उदाहरण 3: उस AP के प्रथम 51 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

हल : n वें पद को a_n से, प्रथम n पदों के योगफल को S_n से और AP के सार्व अंतर को d से व्यक्त करने पर,

$$\text{सार्व अंतर} = d = a_3 - a_2$$
$$= 18 - 14$$
$$= 4$$

अब $$a_1 = a_2 - d$$
$$= 14 - 4 = 10$$

$\therefore$ $$S_{51} = 51\left\{10 + \frac{1}{2}(51-1)4\right\}$$
$$= 51(110) = 5610$$

उदाहरण 4 : किसी AP का सार्व अंतर –2 है। यदि इसका प्रथम पद 100 और अंतिम पद –10 हो, तो इसका योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : सामान्य संकेतन में, $a_1 = 100$ ।

यदि पदों की संख्या n हो, तो $a_n = -10$ है।

अब हमें n ज्ञात करना है।

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{ से,}$$

$\therefore$ $$-10 = 100 + (n-1)(-2)$$

या $$2(n-1) = 100 + 10$$

या $$2n = 112$$

या $$n = 56$$

इस प्रकार, −10, 56 वाँ पद है। अत: हमें उस AP के प्रथम 56 पदों का योगफल ज्ञात करना है, जिसका प्रथम पद 100 और 56 वाँ पद −10 है।

$$\therefore \qquad S_{56} = 56\left\{\frac{100+(-10)}{2}\right\} \quad \text{[(C) का प्रयोग करने पर]}$$

$$= 56 \times 45 = 2520$$

उदाहरण 5 : उस अनुक्रम के प्रथम 24 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद है :

$$a_n = 3 + \frac{2}{3}n$$

हल : जाँच कीजिए कि क्या दिया गया अनुक्रम एक AP है। यदि इसके किन्हीं भी दो क्रमागत पदों का अंतर एक नियत संख्या हो, तो यह AP होगा।

अब,
$$a_n = 3 + \frac{2}{3}n$$

$$\therefore \qquad a_{n+1} = 3 + \frac{2}{3}(n+1)$$

$$= 3 + \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}$$

$$= \left(3 + \frac{2}{3}n\right) + \frac{2}{3}$$

$$= a_n + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \qquad a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}, \text{ जो एक नियत संख्या है।}$$

अत:, दिया गया अनुक्रम एक AP है, जिसका सार्व अंतर $\frac{2}{3}$ है।

प्रथम पद, a_n में $n = 1$ लेने पर प्राप्त होता है।

$$\therefore \qquad a_1 = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

अत: अनुक्रम है :

$$\frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{15}{3}, \frac{17}{3}, \ldots$$

इसका 24 पदों तक योगफल है :

$$S_{24} = 24\left\{\frac{11}{3} + \frac{1}{2} \times (24-1) \times \frac{2}{3}\right\}$$

$$= 24\left\{\frac{11}{3} + \frac{23}{3}\right\}$$

$$= 24 \times \frac{34}{3} = 8 \times 34 = 272$$

प्रश्नावली 5.1

1. ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन-कौन से अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी में हैं। जो समांतर श्रेढ़ी में हों, उनका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

   (i) 3, 6, 12, 24, . . .

   (ii) 0, – 4, – 8, –12, . . .

   (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

   (iv) 12, 2, –8, –18, . . .

   (v) 3, 3, 3, 3, . . . [**संकेत :** याद कीजिए कि d कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।]

   (vi) $p, p + 90, p + 180, p + 270, \ldots$ जहाँ $p = (999)^{999}$

   (vii) 1.0, 1.7, 2.4, 3.1, . . .

   (viii) – 225, – 425, – 625, – 825, . . .

   (ix) $10, 10 + 2^5, 10 + 2^6, 10 + 2^7, \ldots$

   (x) $a + b, (a + 1) + b, (a + 1) + (b + 1), (a + 2) + (b + 1), (a + 2) + (b + 2), \ldots$

   (xi) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

   (xii) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

2. AP का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए और उसके अगले दो पद लिखिए :

(i) $51, 59, 67, 75, \ldots$

(ii) $75, 67, 59, 51, \ldots$

(iii) $1.8, 2.0, 2.2, 2.4, \ldots$

(iv) $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$

(v) $119, 136, 153, 170, \ldots$

3. ज्ञात कीजिए :

(i) $-40, -15, 10, 35, \ldots$ का 10 वाँ पद

(ii) $117, 104, 91, 78, \ldots$ का 8 वाँ पद

(iii) $10.0, 10.5, 11.0, 11.5, \ldots$ का 11 वाँ पद

(iv) $\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4}, \ldots$ का 9 वाँ पद

4. उस AP का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका

(i) प्रथम पद 9 और सार्व अंतर 10 है।

(ii) प्रथम पद -20 और सार्व अंतर 4 है।

(iii) प्रथम पद $\frac{1}{2}$ और सार्व अंतर $\frac{1}{12}$ है।

5. दिखाइए कि $a-b, a$ और $a+b$ किसी AP के क्रमागत पद हैं।

6. समांतर श्रेढ़ी $21, 42, 63, 84, \ldots$ का कौन-सा पद 420 है?

7. यदि निम्नलिखित AP के k वें पद का मान x हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $25, 50, 75, 100, \ldots; \ x = 1000$

(ii) $-1, -3, -5, -7, \ldots; \ x = -151$

(iii) $5\frac{1}{2}, 11, 16\frac{1}{2}, 22, \ldots; \ x = 550$

(iv) $1, \frac{21}{11}, \frac{31}{11}, \frac{41}{11}, \ldots ; \; x = \frac{171}{11}$

8. दी गई AP के लिए $a_{30} - a_{20}$ ज्ञात कीजिए :

(i) $-9, -14, -19, -24, \ldots$

(ii) $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$

9. समांतर श्रेढ़ी $a, a+d, a+2d, \ldots$ के लिए व्यंजक $a_n - a_k$ लिखिए।

फिर उस AP का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए :

(i) जिसका 11 वाँ पद 5 और 13 वाँ पद 79 है।

(ii) जिसके लिए $a_{10} - a_5 = 200$ है।

(iii) जिसका 20 वाँ पद उसके 18 वें पद से 10 अधिक है।

10. समांतर श्रेढ़ी 3, 15, 27, 39, . . . का कौन-सा पद उसके 54 वें पद से 132 अधिक होगा?

11. किसी AP का सार्व अंतर वही है जो एक अन्य AP का। इनमें से एक का प्रथम पद 3 और दूसरी का 8 है। अंतर क्या होगा, उनके

(i) दूसरे पदों में? (ii) चौथे पदों में? (iii) दसवें पदों में? (iv) तीसवें पदों में?

12. किसी AP का सार्व अंतर वही है जो एक अन्य AP का। इनके सौवें पदों में अंतर 111222333 है। उनके दस-लाखवें पदों का अंतर क्या है?

13. किसी AP का प्रथम पद 5 और 100 वाँ पद −292 है। इस AP का 50 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

14. योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) AP ; 2, 6, 10, . . . के प्रथम 11 पदों का।

(ii) AP ; − 6, 0, 6, . . . के प्रथम 13 पदों का।

(iii) उस AP के प्रथम 51 पदों का जिसका दूसरा पद 2 और चौथा पद 8 है।

15. योगफल ज्ञात कीजिए प्रथम

(i) 100 प्राकृत संख्याओं का।

(ii) n प्राकृत संख्याओं का।

16. योगफल ज्ञात कीजिए :

(i) $2 + 4 + 6 + \ldots + 200$

(ii) $3 + 11 + 19 + \ldots + 803$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

17. वह अनुक्रम बताइए जिसका n वाँ पद है :

(i) $3 + 4n$

(ii) $5 + 2n$

(iii) $6 - n$

(iv) $9 - 5n$

दिखाइए कि इनमें से प्रत्येक अनुक्रम एक AP है। प्रत्येक के प्रथम 15 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

18. सिद्ध कीजिए कि a और b कोई भी वास्तविक संख्याएँ हों, n वें पद $a + nb$ वाला अनुक्रम सदैव एक AP ही होगा। सार्व अंतर क्या है? पहले 20 पदों का योगफल क्या है?

19. 1000 रु की राशि को 8% वार्षिक की दर से साधारण ब्याज पर निवेश किया गया। 1, 2, 3,... वर्षों के अंत में ब्याज का परिकलन कीजिए। क्या ब्याजों का यह अनुक्रम एक AP है? 30 वर्ष के अंत में ब्याज ज्ञात कीजिए।

अध्याय 6

किस्त योजनाएँ

6.1 भूमिका

कभी-कभी व्यक्ति साधनों की कमी के कारण किसी वस्तु को खरीदने में असमर्थ होता है, यद्यपि उसे उस वस्तु की आवश्यकता तुरंत होती है। ग्राहकों की सुविधा के लिए जिससे वे साइकिल, पंखे, कूलर, सिलाई मशीन, स्कूटर, रेफ्रिजरेटर, टेलीविजन या कार आदि वस्तुएँ खरीद सकें, व्यापारी लोग एक ऐसी योजना प्रस्तुत करते हैं जो *किस्त योजना* (*instalment scheme या instalment plan*) कहलाती है। व्यापार नीति के अंतर्गत, कभी-कभी व्यापारी ग्राहकों द्वारा इन वस्तुओं को खरीदने के लिए प्रलोभन स्वरूप किस्त योजना आरंभ करते हैं। किसी वस्तु को किस्तों में भुगतान करके खरीदने की इस प्रक्रिया को *किस्त क्रय योजना* (*instalment purchase scheme या instalment buying scheme*) कहते हैं। इस योजना के अंतर्गत, किसी वस्तु को खरीदते समय, ग्राहकों को ऐसी सुविधा प्रदान की जाती है, जिससे वे मूल्य के कुछ भाग का भुगतान वस्तु खरीदते समय और शेष भाग का भुगतान ऐसी आसान किस्तों में कर सकें, जो मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक या वार्षिक भी हो सकती हैं। स्वाभाविक है कि किस्त योजना में क्रेता (ग्राहक) को कुछ अधिक भुगतान करना पड़ेगा, क्योंकि विक्रेता स्थगित भुगतान (शेष भुगतान) पर कुछ ब्याज भी लेगा।

फ्लैट और मकान की *किराया क्रय योजना* (*hire purchase scheme*) से हम सभी परिचित हैं। सरकारी एजेंसियों तथा निजी संगठनों द्वारा निर्मित फ्लैट तथा मकान इस योजना के अंतर्गत समय-समय पर विज्ञप्तियों द्वारा जनता को बेचे जाते हैं। कुल मूल्य का आंशिक भुगतान प्रारंभ में और शेष भुगतान सुविधाजनक किस्तों में किया जाता है, जो मासिक, त्रैमासिक, अर्धवार्षिक या वार्षिक भी हो सकती हैं। इसके अतिरिक्त एक अन्य प्रकार की किस्त योजना भी है, जिसके अंतर्गत बैंकों या वित्तीय संस्थानों से लिए गए ऋण का वापस भुगतान (अदायगी) किया जाता है।

इस अध्याय के आगामी अनुच्छेदों में, हम विभिन्न किस्त योजनाओं और संबंधित अवधारणाओं का विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे।

6.2 किस्त क्रय योजना

किसी वस्तु का *नकद मूल्य* (*cash price*) वह धनराशि है जो ग्राहक को वस्तु के खरीदते समय पूरे भुगतान के रूप में देनी पड़ती है।

तत्काल नकद भुगतान (*cash down payment*) वह धनराशि है, जो ग्राहक द्वारा किसी वस्तु को खरीदते समय उसके मूल्य के आंशिक भुगतान के रूप में करनी पड़ती है। शेष राशि का भुगतान किस्तों में करने के लिए ग्राहक एक समझौता-पत्र (agreement) पर हस्ताक्षर करता है। जैसा कि पहले समझाया गया है, किस्तों में दी गई कुल राशि नकद मूल्य और तत्काल नकद भुगतान के अंतर से सदैव अधिक होती है, क्योंकि विक्रेता शेष भुगतान पर कुछ ब्याज भी लेता है। यदि किस्तें मासिक हों और उनकी संख्या अधिक से अधिक 12 या उससे कम हो, तो साधारण ब्याज लिया जाता है। साधारणतया प्रत्येक किस्त की राशि, किस्त योजना में लगाए गए कुल ब्याज से अधिक अथवा उसके बराबर होती है। हम अपने अध्ययन को केवल इस प्रकार की स्थितियों तक ही सीमित रखेंगे। दूसरे शब्दों में, हम किसी ऐसी स्थिति पर विचार नहीं करेंगे, जिसमें प्रत्येक किस्त की राशि, लिए गए कुल ब्याज से कम हो।

कुछ उदाहरणों द्वारा हम इस योजना को स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1 : एक ब्रीफकेस 800 रु नकद भुगतान अथवा 500 रु तत्काल नकद भुगतान और छः मास पश्चात् देय 320 रु में उपलब्ध है। किस्त योजना के अंतर्गत लगाए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल : ब्रीफकेस का नकद मूल्य = 800 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 500 रु

$\therefore$ किस्त योजना में देय शेष भुगतान का वर्तमान मूल्य

= 800 रु − 500 रु = 300 रु

छः मास बाद देय किस्त की राशि = 320 रु

$\therefore$ 300 रु पर छः मास के लिए ब्याज = 320 रु − 300 रु = 20 रु

यदि ब्याज की वार्षिक दर $r\%$ हो, तो

$$\frac{300 \times r \times 6}{100 \times 12} = 20 \qquad \text{(क्योंकि 6 मास} = \frac{6}{12} \text{ वर्ष)}$$

या $r = 13.33$ (लगभग)

अत:, किस्त योजना में ब्याज की दर 13.33 % वार्षिक है।

उदाहरण 2 : एक साइकिल 1800 रु नकद मूल्य अथवा 600 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 610 रु प्रति मास की दो मासिक किस्तों पर बेची जाती है। किस्त योजना में ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

हल : साइकिल का नकद मूल्य = 1800 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 600 रु

∴ किस्तों में देय शेष मूल्य = 1200 रु

मान लीजिए कि किस्त योजना में ब्याज की दर r % वार्षिक है।

अत: 2 मास बाद, 1200 रु का

$$\text{मिश्रधन} = \left(1200 + \frac{1200 \times r \times 2}{100 \times 12}\right) \text{ रु}$$

$$= (1200 + 2r) \text{ रु} \qquad (1)$$

इसी प्रकार, एक मास बाद दिए गए 610 रु का दूसरे मास के अंत में

$$\text{मिश्रधन} = \left(610 + \frac{610 \times r \times 1}{100 \times 12}\right) \text{ रु}$$

$$= \left(610 + \frac{61r}{120}\right) \text{ रु}$$

दोनों मासिक किस्तों को मिलाकर दो महीनों के अंत में

$$\text{मिश्रधन} = \left(610 + \frac{61r}{120} + 610\right) \text{ रु}$$

$$= \left(1220 + \frac{61r}{120}\right) \text{ रु} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से,

$$1200 + 2r = 1220 + \frac{61r}{120}$$

या $$\frac{179\,r}{120} = 20$$

या $$r = \frac{20 \times 120}{179} = 13.41\% \text{ (लगभग)}$$

अतः, किस्त योजना में ब्याज की वार्षिक दर = 13.41 % ।

वैकल्पिक विधि

साइकिल का नकद मूल्य = 1800 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 600 रु

किस्तों में देय शेष मूल्य = 1200 रु

समान किस्तों की संख्या= 2

प्रत्येक किस्त की धनराशि = 610 रु

किस्तों में दी गई कुल राशि = (2 × 610) रु = 1220 रु

किस्त योजना में दिया गया कुल ब्याज = (1220 – 1200) रु = 20 रु (1)

पहले मास के लिए मूलधन = 1200 रु

दूसरे मास के लिए मूलधन = (1200 – 610) रु

= 590 रु

एक मास के लिए कुल मूलधन = (1200 + 590) रु

= 1790 रु

अंतिम शेष मूलधन (590 रु) + दिया गया ब्याज (20 रु)

= मासिक किस्त (610 रु) = अंतिम किस्त

मान लीजिए कि ब्याज की दर r % वार्षिक है, तब

$$\text{कुल ब्याज} = \frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} \text{ रु} \qquad (2)$$

(1) और (2) से,

$$\frac{1790 \times r \times 1}{100 \times 12} = 20$$

या $$r=\frac{20\times1200}{1790}=13.41 \text{ (लगभग)}$$

अतः, किस्त योजना में ब्याज की वार्षिक दर = 13.41% ।

उदाहरण 3 : कपड़े धोने की एक मशीन 6400 रु नकद मूल्य अथवा 1400 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 1030 रु प्रति मास की पाँच किस्तों में उपलब्ध है। किस्त योजना में ब्याज की दर परिकलित कीजिए।

हल : कपड़े धोने की मशीन का नकद मूल्य = 6400 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 1400 रु

किस्तों में देय शेष मूल्य = 5000 रु

माना कि ब्याज की दर = r % वार्षिक

5 मास बाद 5000 रु का r % वार्षिक ब्याज की दर से मिश्रधन

$$=\left[5000+5000\times\frac{5}{12}\times\frac{r}{100}\right]\text{ रु}$$

$$=\left(5000+\frac{250r}{12}\right)\text{ रु} \qquad (1)$$

पाँचवें मास बाद 1030 रु की पहली किस्त का मिश्रधन

$$=\left(1030+\frac{1030\times r\times4}{100\times12}\right)\text{ रु}$$

इसी प्रकार, दूसरी किस्त का मिश्रधन

$$=\left(1030+\frac{1030\times r\times3}{100\times12}\right)\text{ रु}$$

तीसरी और चौथी किस्तों का मिश्रधन क्रमशः

$$\left(1030+\frac{1030\times r\times2}{100\times12}\right)\text{ रु} \quad \text{तथा} \quad \left(1030+\frac{1030\times r\times1}{100\times12}\right)\text{ रु}$$

होगा।

पाँचवें महीने के अंत में पाँचों किस्तों का मिश्रधन

$$= \left[1030 \times 5 + \frac{103r}{120}(4+3+2+1)\right] \text{ रु}$$

$$= \left(5150 + \frac{103r}{12}\right) \text{ रु} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से,

$$5000 + \frac{250r}{12} = 5150 + \frac{103r}{12}$$

या $$\frac{147r}{12} = 150$$

या $$r = \frac{150 \times 12}{147} = 12.24 \text{ (लगभग)}$$

अतः, किस्त योजना में ब्याज की वार्षिक दर = 12.24%

वैकल्पिक विधि

कपड़े धोने की मशीन का नकद मूल्य = 6400 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 1400 रु

किस्तों में देय शेष मूल्य = 5000 रु

समान मासिक किस्तों की संख्या = 5

प्रत्येक किस्त की राशि = 1030 रु

किस्त योजना में भुगतान की गई कुल राशि = (5 × 1030) रु

= 5150 रु

अतः, किस्त योजना में दिया गया कुल ब्याज = (5150 – 5000) रु

= 150 रु (1)

पहले मास के लिए मूलधन = 5000 रु

दूसरे मास के लिए मूलधन = 5000 रु – 1030 रु = 3970 रु

तीसरे मास के लिए मूलधन = 2940 रु

चौथे मास के लिए मूलधन = 1910 रु

पाँचवें मास के लिए मूलधन = 880 रु

एक मास के लिए कुल मूलधन = 14700 रु

अंतिम शेष मूलधन (880 रु) + दिया गया ब्याज (150 रु)

= मासिक किस्त (1030 रु)

माना कि ब्याज की वार्षिक दर = r %

अतः, ब्याज = $\frac{14700 \times r \times 1}{100 \times 12}$ रु (2)

(1) तथा (2) से,

$$\frac{14700 \times r \times 1}{100 \times 12} = 150$$

या $$r = \frac{150 \times 1200}{14700} = 12.24 \text{ (लगभग)}$$

अतः, किस्त योजना में ब्याज की वार्षिक दर = 12.24 %

उदाहरण 4 : एक कंपनी एक कंप्यूटर 19200 रु नकद मूल्य अथवा 4800 रु तत्काल नकद भुगतान तथा पाँच समान मासिक किस्तों पर बेचती है। यदि कंपनी 12 % वार्षिक की दर से ब्याज लेती हो, तो प्रत्येक किस्त ज्ञात कीजिए।

हल : कंप्यूटर का नकद मूल्य = 19200 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 4800 रु

किस्तों में देय शेष मूल्य = (19200 − 4800) रु

= 14400 रु

ब्याज की दर = 12% वार्षिक

5 मास के अंत में, 14400 रु का मिश्रधन

$$= \left(14400 + \frac{14400 \times 12 \times 5}{100 \times 12}\right) \text{ रु}$$

$$= (14400 + 720) \text{ रु}$$

$$= 15120 \text{ रु} \qquad (1)$$

माना कि प्रत्येक मास बाद देय किस्त $= x$ रु

पाँचवें मास के अंत में, x रु की पहली किस्त का मिश्रधन

$$= \left(x + \frac{x \times 12 \times 4}{100 \times 12}\right) \text{ रु}$$

दूसरी किस्त का मिश्रधन $= \left(x + \frac{x \times 12 \times 3}{100 \times 12}\right)$ रु

तीसरी किस्त का मिश्रधन $= \left(x + \frac{x \times 12 \times 2}{100 \times 12}\right)$ रु

चौथी किस्त का मिश्रधन $= \left(x + \frac{x \times 12 \times 1}{100 \times 12}\right)$ रु

पाँचवें मास के अंत में, सभी पाँच किस्तों का कुल मिश्रधन

$$= \left[\left(x + \frac{12x \times 4}{100 \times 12}\right) + \left(x + \frac{12x \times 3}{100 \times 12}\right) + \left(x + \frac{12x \times 2}{100 \times 12}\right) + \left(x + \frac{12x \times 1}{100 \times 12}\right) + x\right] \text{ रु}$$

$$= \left[5x + \frac{12x}{100 \times 12}(4 + 3 + 2 + 1)\right] \text{ रु}$$

$$= \left[5x + \frac{1}{10}x\right] \text{ रु}$$

$$= \frac{51x}{10} \text{ रु} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से,

$$\frac{51x}{10} = 15120$$

या $$x = \frac{15120 \times 10}{51} = 2964.70$$

अतः, प्रत्येक किस्त = 2964.70 रु

वैकल्पिक विधि

कंप्यूटर का नकद मूल्य	= 19200 रु
किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान	= 4800 रु
किस्तों में देय मूल्य	= 14400 रु
समान मासिक किस्तों की संख्या	= 5
ब्याज की वार्षिक दर	= 12 %
माना कि प्रत्येक किस्त की राशि	= x रु
∴ किस्त योजना में देय ब्याज	= $(5x - 14400)$ रु (1)
पहले मास के लिए मूलधन	= 14400 रु
दूसरे मास के लिए मूलधन	= $(14400 - x)$ रु
तीसरे मास के लिए मूलधन	= $(14400 - 2x)$ रु
चौथे मास के लिए मूलधन	= $(14400 - 3x)$ रु
पाँचवें मास के लिए मूलधन	= $(14400 - 4x)$ रु
एक मास के लिए कुल मूलधन	= $(72000 - 10x)$ रु

अंतिम शेष मूलधन $(14400 - 4x)$ रु + लिया गया ब्याज $(5x - 14400)$ रु

= मासिक किस्त (x रु)

अतः, लिया गया कुल ब्याज $= \frac{(72000-10x) \times 12 \times 1}{100 \times 12}$ रु (2)

(1) तथा (2) से,

$$\frac{(72000-10x) \times 12}{1200} = 5x - 14400$$

या $$7200 - x = 50\,x - 144000$$

या $$51\,x = 151200$$

या $$x = 2964.70$$

अतः, किस्त योजना में प्रत्येक मासिक किस्त की राशि 2964.70 रु है।

प्रश्नावली 6.1

1. कमरा गर्म करने का एक हीटर 440 रु नकद मूल्य अथवा 200 रु तत्काल नकद भुगतान तथा एक मास बाद 244 रु देय राशि पर बेचा जाता है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की वार्षिक दर ज्ञात कीजिए।

2. बिजली की एक इस्त्री 550 रु नकद मूल्य अथवा 250 रु तत्काल नकद भुगतान तथा दो मास बाद 305 रु देय राशि पर उपलब्ध है। इस योजना में ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

3. एक प्रेशर कुकर 500 रु नकद मूल्य अथवा 250 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन मास बाद 260 रु की देय राशि पर बेचा जाता है। इस योजना में ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

4. एक रूम कूलर 2400 रु नकद मूल्य अथवा 1200 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 610 रु की दो समान मासिक किस्तों पर खरीदा जा सकता है। किस्त योजना में ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

5. एक घड़ी 960 रु नकद मूल्य अथवा 480 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 245 रु प्रति मास की दो समान मासिक किस्तों पर उपलब्ध है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर परिकलित कीजिए।

6. एक पंखा 970 रु नकद मूल्य अथवा 210 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन समान मासिक किस्तों पर मिलता है। यदि किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर 16% वार्षिक हो, तो मासिक किस्त ज्ञात कीजिए।

7. एक मिक्सी 1500 रु नकद मूल्य अथवा 360 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 390 रु प्रति मास की तीन समान किस्तों पर उपलब्ध है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

8. गैस की एक कुकिंग रेंज 2500 रु नकद मूल्य अथवा 520 रु तत्काल नकद भुगतान तथा चार समान मासिक किस्तों पर उपलब्ध है। यदि लिए गए ब्याज की दर 25% वार्षिक हो, तो मासिक किस्त की राशि परिकलित कीजिए।

9. एक स्कूटर 28000 रु नकद मूल्य अथवा 7400 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 5200 रु प्रति मास की चार समान किस्तों पर खरीदा जा सकता है। किस्त योजना के अंतर्गत लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

10. एक टाइपराइटर 7200 रु नकद मूल्य अथवा 3040 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 860 रु प्रति मास की पाँच समान किस्तों पर उपलब्ध है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

11. कोई वस्तु 500 रु नकद मूल्य अथवा 150 रु तत्काल नकद भुगतान तथा पाँच समान मासिक किस्तों पर बेची जाती है। यदि लिए गए ब्याज की दर 18% वार्षिक हो, तो मासिक किस्त की राशि परिकलित कीजिए।

12. एक ट्रैक्टर 450000 रु नकद मूल्य अथवा 150000 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 32000 रु प्रति मास की 10 समान किस्तों पर बेचा जाता है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

13. एक टेलीविजन सेट 24000 रु नकद मूल्य अथवा 8000 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 2800 रु प्रति मास की छ: समान किस्तों पर खरीदा जा सकता है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर परिकलित कीजिए।

14. कोई वस्तु 7000 रु नकद मूल्य अथवा 1900 रु तत्काल नकद भुगतान तथा छ: समान मासिक किस्तों पर उपलब्ध है। यदि दिए गए ब्याज की दर $2\frac{1}{2}$% मासिक हो, तो प्रत्येक किस्त की राशि परिकलित कीजिए।

15. एक स्टीरियो सेट 5600 रु नकद मूल्य अथवा 1800 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 400 रु प्रति मास की 10 समान किस्तों पर बेचा जाता है। किस्त योजना में लिए गए ब्याज की दर ज्ञात कीजिए।

16. एक विद्युत जेनरेटर 39000 रु नकद मूल्य अथवा 25 % तत्काल नकद भुगतान तथा 3900 रु प्रति मास की 8 समान किस्तों पर बेचा जाता है। लिए गए ब्याज की दर परिकलित कीजिए।

17. एक वीडियो कैमरा 60000 रु नकद मूल्य अथवा 20 % तत्काल नकद भुगतान तथा 5000 रु प्रति मास की 10 समान किस्तों पर खरीदा जा सकता है। ग्राहक को कितनी ब्याज की दर देनी होगी?

18. एक जिराक्स मशीन 78000 रु नकद मूल्य अथवा $33\frac{1}{3}$% तत्काल नकद भुगतान तथा 4900 रु प्रति मास की 11 समान किस्तों पर उपलब्ध है। लिए गए ब्याज की दर परिकलित कीजिए।

6.3 ऋण का भुगतान (चुकाना)

पिछले अनुच्छेद में, हमने किस्त योजनाओं की ऐसी समस्याओं के बारे में अध्ययन किया है, जिनमें किस्तें मासिक थीं और किस्तों के भुगतान का कुल समय एक वर्ष से अधिक नहीं था। इन सभी प्रश्नों में साधारण ब्याज लिया गया था। इस अनुच्छेद में, हम किराया क्रय योजनाओं और ऋण भुगतान की समस्याओं के बारे में अध्ययन करेंगे, जिनमें किस्तें मासिक न होकर त्रैमासिक,

अर्धवार्षिक अथवा वार्षिक होती हैं तथा इन किस्त योजनाओं में लिया गया ब्याज *चक्रवृद्धि ब्याज* होता है। लंबे और कठिन परिकलन से बचने के लिए, हम केवल ऐसी स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें किस्तें तीन से अधिक न हों। उपर्युक्त योजना के स्पष्टीकरण हेतु हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 5 : एक राज्य सरकार 550000 रु नकद मूल्य अथवा 42750 रु तत्काल नकद भुगतान और तीन समान वार्षिक किस्तों पर फ्लैट बेचने की घोषणा करती है। इस कल्याणकारी योजना के अंतर्गत सरकार नाममात्र के लिए 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज भी लेती है। यदि कोई व्यक्ति इस किस्त योजना में फ्लैट खरीदता है, तो प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

हल : फ्लैट का नकद मूल्य = 550000 रु

किस्त योजना में तत्काल नकद भुगतान = 42750 रु

∴ किस्तों में देय राशि का वर्तमान मूल्य = 550000 रु – 42750 रु

= 507250 रु

माना कि प्रत्येक वार्षिक किस्त x रु है।

मूलधन (वर्तमान मूल्य) जो पहले वर्ष के अंत में x रु हो जाएगा

$$= x \div \left(1+\frac{8}{100}\right)^{1} \text{ रु}$$

$$= x \div \left(\frac{27}{25}\right) \text{ रु}$$

$$= \left(\frac{25}{27}\right)x \text{ रु}$$

इसी प्रकार, दूसरे और तीसरे वर्ष के अंत में, य दसरी तथा तीसरी किस्तों का वर्तमान मूल्य क्रमशः

अत:, तीनों किस्तों का कुल वर्तमान मूल्य

$$= \left[\left(\frac{25}{27}\right) x + \left(\frac{25}{27}\right)^2 x + \left(\frac{25}{27}\right)^3 x\right] \text{ रु}$$

यह राशि 507250 रु के बराबर है।

$$\therefore \qquad \frac{25}{27} x \left[1 + \frac{25}{27} + \left(\frac{25}{27}\right)^2\right] = 507250$$

$$\therefore \qquad x = \frac{507250 \times 27}{25\left(1 + \frac{25}{27} + \frac{625}{729}\right)}$$

$$= \frac{507250 \times 27 \times 729}{25 \times 2029}$$

$$= 196830$$

अत:, प्रत्येक किस्त का मूल्य = 196830 रु है।

उदाहरण 6 : एक व्यक्ति किसी वित्त कंपनी से कुछ राशि ऋण लेता है और इसे वह दो समान अर्धवार्षिक किस्तों में लौटाता है, जबकि प्रत्येक किस्त 4945 रु की है। यदि कंपनी 15% वार्षिक की दर से अर्धवार्षिक संयोजित चक्रवृद्धि ब्याज लेती है, तो मूलधन तथा कुल दिया गया ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : पहले छ: मास के अंत में देय किस्त 4945 रु में मूलधन और इस पर $\frac{15}{2}$ % छमाही दर से ब्याज सम्मिलित है।

यह मूलधन (वर्तमान मूल्य) $= \left[4945 \div \left(1 + \frac{15}{200}\right)\right]$ रु

$$= 4945 \times \frac{200}{215} \text{ रु} = 4945 \times \frac{40}{43} \text{ रु}$$

$$= 4600 \text{ रु}$$

इसी प्रकार, एक वर्ष बाद देय किस्त 4945 रु का संगत मूलधन

$$= \left[4945 \div \left(1+\frac{15}{200}\right)^2\right] \text{ रु}$$

$$= 4945 \times \frac{40}{43} \times \frac{40}{43} = 4279.07 \text{ रु}$$

अतः, ऋण ली गई कुल राशि (मूलधन) = (4600 + 4279.07) रु = 8879.07 रु

= 8879 रु (लगभग)

कुल दिया गया ब्याज = (4945 × 2 – 8879) रु = 1011 रु

उदाहरण 7 : एक टेलीविजन सेट 19650 रु नकद मूल्य अथवा 3100 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन समान वार्षिक किस्तों पर उपलब्ध है। यदि दुकानदार 10% वार्षिक की दर से, वार्षिक संयोजित, ब्याज लेता है, तो प्रत्येक किस्त की राशि परिकलित कीजिए।

हल : माना कि प्रत्येक किस्त = x रु

क्रय मूल्य की शेष राशि जो किस्तों में देनी है = (19650 – 3100) रु = 16550 रु

पहले वर्ष के अंत में देय x रु की राशि का वर्तमान मूल्य

$$= x \div \left(1+\frac{10}{100}\right) \text{ रु} = x\left(\frac{10}{11}\right) \text{ रु}$$

इसी प्रकार, दूसरे और तीसरे वर्ष के अंत में देय x रु की राशि के वर्तमान मूल्य क्रमशः $x\left(\frac{10}{11}\right)^2$ रु तथा $x\left(\frac{10}{11}\right)^3$ रु होंगे।

∴ तीनों किस्तों के वर्तमान मूल्यों का योग

$$= \left[x\left(\frac{10}{11}\right) + x\left(\frac{10}{11}\right)^2 + x\left(\frac{10}{11}\right)^3\right] \text{ रु}$$

और यह 16550 रु के बराबर है।

$$\therefore \quad x\left[\left(\frac{10}{11}\right) + \left(\frac{10}{11}\right)^2 + \left(\frac{10}{11}\right)^3\right] = 16550$$

या $$x\left[\frac{1210+1100+1000}{1331}\right]=16550$$

या $$x\left[\frac{3310}{1331}\right]=16550 \text{ या } x = 6655$$

अतः, प्रत्येक किस्त 6655 रु की है।

उदाहरण 8 : राम ने कुछ राशि उधार ली और उसे तीन समान त्रैमासिक किस्तों में लौटा दिया, जबकि प्रत्येक किस्त 17576 रु की थी। उधार ली गई धनराशि ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज की दर 16% वार्षिक हो और ब्याज त्रैमासिक संयोजित किया गया हो। कुल लिया गया ब्याज भी ज्ञात कीजिए।

हल : ब्याज की दर = 16 % वार्षिक

= 4 % त्रैमासिक

(चूंकि प्रश्न में यह दिया गया है कि ब्याज त्रैमासिक संयोजित किया जाता है।)

पहले तीन मास के अंत में दी गई 17576 रु की राशि का वर्तमान मूल्य

$$=17576\div\left(1+\frac{4}{100}\right)^{1} \text{ रु} = \left(17576\times\frac{25}{26}\right) \text{ रु}$$

इसी प्रकार, दूसरे तीन मास तथा तीसरे तीन मास के अंत में दी गई 17576 रु की किस्तों का वर्तमान मूल्य क्रमशः

$$\left[17576\left(\frac{25}{26}\right)^{2}\right] \text{ रु तथा } \left[17576\left(\frac{25}{26}\right)^{3}\right] \text{ रु}$$

है।

अतः, तीनों किस्तों का कुल वर्तमान मूल्य $=\left[17576\left\{\left(\frac{25}{26}\right)+\left(\frac{25}{26}\right)^{2}+\left(\frac{25}{26}\right)^{3}\right\}\right]$ रु

$$=\left[17576\times\left(\frac{25}{26}\right)\left\{1+\frac{25}{26}+\frac{625}{676}\right\}\right] \text{ रु}$$

$$= 17576 \times \left(\frac{25}{26}\right)\left[\frac{676+650+625}{676}\right] \text{ रु}$$

$$= \frac{17576 \times 25 \times 1951}{26 \times 676} \text{ रु} = 48775 \text{ रु}$$

किस्तों में दी गई कुल राशि = (17576 × 3) रु = 52728 रु

अतः, लिया गया ब्याज = (52728 – 48775) रु

= 3953 रु

प्रश्नावली 6.2

1. एक व्यक्ति किसी वित्त कंपनी से 8160 रु उधार लेता है और इसे दो समान वार्षिक किस्तों में लौटाता है। यदि ब्याज की दर 12.5 % वार्षिक हो और ब्याज का संयोजन भी वार्षिक हो, तो किस्त की राशि ज्ञात कीजिए।

2. 390200 रु की एक राशि तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाई जाती है। प्रत्येक किस्त कितनी होगी, यदि ब्याज 4 % वार्षिक की दर से प्रति वर्ष संयोजित होता है?

3. एक कार 402200 रु नकद मूल्य अथवा 150000 रु तत्काल नकद भुगतान तथा 3 समान छमाही किस्तों पर उपलब्ध है। प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज की दर 10 % वार्षिक हो, जो अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

4. किसी ऋण को दो समान वार्षिक किस्तों में चुकाना है। यदि 16 % वार्षिक ब्याज का संयोजन वार्षिक हो और प्रत्येक किस्त 1682 रु की हो, तो ऋण की राशि और कुल ब्याज परिकलित कीजिए।

5. 12750 रु का एक ऋण दो समान छमाही किस्तों में वापस किया जाना है। यदि 8 % वार्षिक ब्याज का संयोजन छमाही हो, तो प्रत्येक किस्त कितने की होगी?

6. 10815 रु की एक राशि को 3 समान छमाही किस्तों में लौटाना है। प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज $13\frac{1}{3}$ % वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

7. एक कंप्यूटर 39300 रु नकद मूल्य अथवा 12820 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन समान अर्धवार्षिक किस्तों पर उपलब्ध है। प्रत्येक किस्त की राशि परिकलित कीजिए, यदि विक्रेता 20 % वार्षिक की दर से ब्याज लेता है, जबकि ब्याज अर्धवार्षिक संयोजित होता है।

8. एक भवन निर्माता किसी फ्लैट को 3000000 रु नकद मूल्य अथवा 1031600 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन समान त्रैमासिक किस्तों पर बेचने की घोषणा करता है। यदि 10 % वार्षिक ब्याज का संयोजन त्रैमासिक हो, तो किस्त योजना में प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए। कुल ब्याज भी ज्ञात कीजिए।

9. एक व्यक्ति चक्रवृद्धि ब्याज पर कुछ ऋण लेता है और इसे तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटा देता है। यदि ब्याज की दर 15 % वार्षिक तथा वार्षिक किस्त 486680 रु की हो, तो ऋण की राशि ज्ञात कीजिए।

10. एक आवास समिति फ्लैट के लिए 1600000 रु नकद मूल्य अथवा 585500 रु तत्काल नकद भुगतान तथा तीन समान अर्धवार्षिक किस्तें लेती है। यदि समिति 16 % वार्षिक ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक करती हो, तो प्रत्येक किस्त की राशि परिकलित कीजिए। दिया गया कुल ब्याज भी ज्ञात कीजिए।

अध्याय 7

आयकर

7.1 भूमिका

सरकार को अपने कर्तव्य निभाने के लिए बहुत से कार्य करने होते हैं; जैसे — कानून-व्यवस्था बनाए रखना, न्याय-पद्धति को चलाना, देश की सुरक्षा करना, मुद्रा का प्रचलन एवं उसका स्थायित्व बनाए रखना, स्वास्थ्य एवं शिक्षा की सुविधा देना, बेरोजगारी एवं गरीबी का उन्मूलन करना आदि। एक कल्याणकारी राज्य होने के नाते, इसका कर्तव्य बनता है कि धनी वर्ग तथा निधन वर्ग के बीच की खाई को पाटा जाए और जहाँ कहीं भूख जैसी बुराई हो, उसे समाप्त किया जाए। इन सभी पर सरकार को बहुत-सा धन व्यय करना पड़ता है और यह व्यय दिन प्रतिदिन बढ़ता ही जाता है।

'देश के विकास के लिए और इन सभी कार्यों को करने के लिए इतनी बड़ी मात्रा में धन सरकार को कहाँ से प्राप्त होता है?' हम एक विकासशील राष्ट्र में रह रहे हैं और यदि हमें एक विकसित राष्ट्र बनाना है, तो केवल सरकार को ही नहीं अपितु देश के सभी लोगों को सतत् प्रयास करना होगा। सरकार यह वांछित धन राजस्व के रूप में अनेक साधनों से जुटाती है। इन सभी में से एक महत्वपूर्ण साधन को *कर-प्रणाली (Taxation)* कहते हैं। आपने, इनमें से कई के बारे में सुना होगा जैसे आयकर (Income Tax), वैभव या धन कर (Wealth Tax), सेवा कर (Service Tax), बिक्री कर (Sales Tax), संपत्ति कर (Property Tax), मनोरंजन कर (Entertainment Tax), चुंगी शुल्क (Octroi), सीमा शुल्क (Custom Duty), उत्पाद शुल्क (Excise Duty) इत्यादि। इन सभी करों का प्रस्ताव, वृद्धि या कमी, केंद्रीय सरकार, प्रदेश सरकार, नगर निगम अथवा समिति, छावनी बोर्ड, जनपद बोर्ड इत्यादि द्वारा अपने वार्षिक बजट में किया जाता है। यह वित्तीय वर्ष के प्रारंभ में, कैलेंडर वर्ष की 1 अप्रैल से अगले कैलेंडर वर्ष की 31 मार्च तक किया जाता है। किन-किन क्षेत्रों में केंद्रीय सरकार, प्रदेश सरकार, अथवा स्थानीय संस्थाएँ (Local Bodies) कर लगा सकती हैं, पहले से ही निर्धारित होता है। क्योंकि केंद्र सरकार इन करों का अधिक भाग प्राप्त करती है, इसलिए उसे इन सभी साधनों का कुछ अंश प्रदेश सरकारों अथवा

संघीय क्षेत्रों को भी देना होता है ताकि वे भी विकास के लिए और दूसरे खर्च करने के लिए उसका उपयोग कर सकें। अत: देश के नागरिकों द्वारा प्रदत्त ये कर देश के विकास तथा सरकार द्वारा इसकी सामाजिक एवं आर्थिक दायित्व की पूर्ति के लिए होते हैं। इन करों का भुगतान, व्यक्ति अथवा व्यापारिक तथा औद्योगिक प्रतिष्ठान करते हैं।

7.2 करों का वर्गीकरण

करों का वर्गीकरण बहुत से रूपों में किया जा सकता है; जैसे –

(i) आय पर कर

(ii) धन पर कर

(iii) संपत्ति पर कर

(iv) उत्पादन पर कर

(v) आयात और निर्यात पर कर

(vi) वाहनों पर कर

(vii) वस्तुओं की बिक्री पर कर

(viii) माल के स्थानांतरण पर कर

किंतु व्यापक रूप में, इन्हें दो वर्गों में बाँटा जा सकता है :

(क) प्रत्यक्ष कर (Direct Taxes)

(ख) अप्रत्यक्ष कर (Indirect Taxes)

(क) प्रत्यक्ष कर : वह कर, जो किसी व्यक्ति या व्यक्तियों के समूह पर लगाया जाता है और उसको या उनको सीधा प्रभावित करता है, अर्थात् जिसको उसे अथवा उन्हें सीधा सरकार को देना होता है, *प्रत्यक्ष कर* कहलाता है।

उदाहरण के लिए, आयकर, धन अथवा वैभव कर, संपत्ति कर, व्यावसायिक कर इत्यादि सभी प्रत्यक्ष कर हैं।

(ख) अप्रत्यक्ष कर : इस वर्ग में लगाए गए कर निम्न प्रकार के हैं :

(i) केंद्रीय उत्पाद कर (शुल्क), जिसे उत्पादित वस्तुओं पर लगाया जाता है।

(ii) वस्तुओं के आयात और निर्यात पर लगाया गया सीमा शुल्क।

(iii) रसीदी टिकट शुल्क।

(iv) केंद्रीय बिक्री कर।

(v) प्रदेश उत्पाद शुल्क (कर)।

(vi) बिक्री कर।

(vii) मनोरंजन कर।

(viii) चुंगी शुल्क।

(ix) शिक्षा उपकर (Education Cess)।

अगले अनुच्छेद में हम केवल आयकर के बारे में पढ़ेंगे।

7.3 आयकर

एक व्यक्ति या व्यक्तियों के समूह की वार्षिक आय पर लगाए गए कर को *आयकर* कहते हैं। इस अनुच्छेद में, हम सरल स्थितियों में केवल वेतन भोगी व्यक्तियों तथा पेंशन भोगी व्यक्तियों पर लगे आयकर के परिकलनों के बारे में ही पढ़ेंगे।

प्रत्येक व्यक्ति, जिसकी वार्षिक आय एक निर्धारित सीमा से अधिक होती है, को आयकर अधिनियम (Income Tax Act) के अंतर्गत, अपनी आय का कुछ भाग आयकर के रूप में अदा करना होता है। केंद्र सरकार प्रत्येक वित्तीय वर्ष से पहले, कर की दरों की घोषणा करती है। प्रत्येक व्यक्ति को आयकर विभाग द्वारा एक '*स्थाई खाता संख्या*' (*Permanent Account Number*) (PAN) दिया जाता है। करदाता को अगली वित्तीय वर्ष की एक पूर्व निश्चित तिथि से पहले अपनी *आयकर विवरणी* (*Income Tax Return*) जमा करनी होती है। साधारणतया यह तिथि अगले वित्तीय वर्ष की 31 जुलाई होती है। अगले वित्तीय वर्ष को *कर निर्धारण वर्ष* (*Assessment year*) भी कहते हैं। इस प्रकार, वित्तीय वर्ष 2002-2003 का संगत *कर निर्धारण वर्ष* 2003-2004 होगा।

अगले परिच्छेदों में, हम विभिन्न अंतरालों में आयकर की दरें, वेतन भोगी एवं पेंशन भोगी व्यक्तियों के लिए *मानक कटौती* (*Standard Deduction*), कुछ पूर्व निर्धारित प्रकार के दिए गए दानों पर कटौती तथा बचत पर कर में छूट के बारे में ब्यौरा देंगे।

व्यक्ति के लिए वित्तीय वर्ष 2002–2003 (कर निर्धारण वर्ष 2003–2004) में आयकर की दरें

कर योग्य आय* (रुपए में, निकटतम 10 रु तक)	दर आयकर**	अधिभार
50,000 तक	कुछ नहीं	कुछ नहीं
50,001 से 60,000 तक	50,000 रु से अधिक राशि का 10 %	कुछ नहीं
60,001 से 1,50,000 तक	1000 रु + 60,000*** रु से अधिक राशि का 20 %	5 %
1,50,000 से अधिक	19,000 रु + 1,50,000 रु से अधिक राशि का 30 %	5 %

हमारी रुचि वेतन भोगी (पेंशन भोगी सहित) व्यक्तियों के लिए आयकर के परिकलन में ही रहेगी। इन सभी को मानक कटौती की सुविधा निम्न प्रकार से उपलब्ध रहती है :

आय (Salary)	मानक कटौती (Standard Deduction)
(i) यदि वेतन 1,50,000 रु से अधिक नहीं है	वेतन का $\frac{1}{3}$ भाग, परंतु अधिकतम सीमा 30,000 रु
(ii) यदि वेतन 1,50,000 रु से अधिक हो और 3,00,000 रु से अधिक नहीं	25,000 रु
(iii) यदि वेतन 3,00,000 रु से अधिक हो और 5,00,000 रु से अधिक नहीं	20,000 रु
(iv) यदि वेतन 5,00,000 से अधिक हो	कुछ नहीं

* कर योग्य आय = कुल आय – अनुमति प्राप्त कटौतियाँ

** शुद्ध देय आयकर (आयकर + अधिभार) को निकटतम 1 रु तक परिकलित किया जाता है।

*** अधिभार सहित कुल आयकर (व्यक्ति की आय – 60000 रु) से अधिक नहीं होगा।

दान की वृत्ति को बढ़ावा देने के लिए, कर योग्य आय में कटौती का भी प्रावधान दिया गया है। कुछ दान राशियाँ, जो 100 % और कुछ 50 % तक कर मुक्त हैं, निम्न हैं :

दान (Donation)	दान राशि की आय में से कटौती की दर
(i) प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष	100 %
(ii) राष्ट्रीय सुरक्षा कोष	100 %
(iii) आयुर्विज्ञान अनुसंधान में दी गई दान राशि	100 %
(iv) अन्य धर्मार्थ ट्रस्ट (Charitable Trusts) जैसे शिक्षण संस्थाएँ, अस्पताल, अनाथालय आदि	50 %

दान दी गई राशि जिस पर आय में कटौती का प्रावधान है, व्यक्ति की कुल आय के 10 % से अधिक नहीं हो सकती। उपर्युक्त दी गई कटौतियों के अतिरिक्त कुछ विशेष वर्गों के व्यक्तियों को आयकर में छूट निम्न प्रकार भी दी जाती है :

वरिष्ठ नागरिकों (senior citizens), जिनकी आयु किसी वित्तीय वर्ष में 65 वर्ष अथवा अधिक हो जाती है, को उनकी कुल आय पर लगने वाले आयकर में 100 % छूट दी जाती है, जिसकी अधिकतम सीमा 15000 रु है।

महिलाओं (यद्यपि उनकी आयु 65 वर्ष से कम भी हो) को आयकर में 100 % की छूट दी जाती है, जिसकी अधिकतम सीमा 5000 रु है।

प्रत्येक व्यक्ति को उसकी आय में कुछ निर्धारित बचत करने पर कर में छूट का भी प्रावधान है; जैसे –

(i) अंशदायी भविष्य निधि (CPF)

(ii) सामान्य भविष्य निधि (GPF)

(iii) सार्वजनिक भविष्य निधि (PPF)

(iv) जीवन बीमा प्रीमियम (LIC) जिसमें यूनिट संबंधी बीमा योजना (ULIP) भी सम्मिलित है।

(v) राष्ट्रीय बचत पत्र (NSC)/ राष्ट्रीय बचत योजना (NSS)

(vi) कुछ निर्धारित इंफ्रास्ट्रक्चर बाँडों आदि में जमा की गई राशि

इन पर निम्न दरों से आयकर में छूट दी जाती है :

आय	छूट (आयकर में)
(क) यदि कुल आय (कटौतियाँ देने के पश्चात्) 150000 रु तक है	बचत का 20 %
(ख) यदि कुल आय 150000 रु से अधिक तथा 500000 रु तक है	बचत का 15 %
(ग) यदि कुल आय 500000 रु से अधिक है	कुछ नहीं
(घ) यदि कुल आय 100000 रु से अधिक नहीं है (मानक कटौती देने से पहले), कुछ प्रतिबंधों के अंतर्गत।	बचत का 30 %

उपर्युक्त (i) से (v) तक में की गई बचत पर केवल 70000 रु तक की बचत पर ही आयकर में छूट दी जाती है। 100000 रु तक की बचत पर आयकर की छूट का प्रावधान तभी है यदि इसमें से कम से कम 30000 रु इंफ्रास्ट्रक्चर बाँडों (vi) में जमा करवाए गए हों।

निम्न उदाहरणों में हम आयकर का परिकलन केवल वेतन भोगी/पेंशन भोगी व्यक्तियों के संदर्भ में करेंगे। वेतन में हम घर का किराया भत्ता (HRA) तथा परिवहन भत्ता सम्मिलित नहीं करेंगे।

उदाहरण 1 : कृष्ण की वेतन रूप में कुल वार्षिक आय 120000 रु है। वह 500 रु प्रति मास भविष्य निधि में जमा करता है। परिकलित कीजिए कि उसे कितना आयकर देना होगा।

हल : वेतन से कुल आय = 120000 रु

मानक कटौती = 120000 रु का $\frac{1}{3}$ भाग

जिसकी अधिकतम सीमा 30000 रु

= 30000 रु

कर योग्य आय = (120000 – 30000) रु = 90000 रु

50000 रु तक कर = कुछ नहीं

अगले 10000 रु पर कर = 1000 रु (1)

(90000 – 60000) रु, अर्थात् 30000 रु पर 20% की दर से कर

$$= \left(30000 \times \frac{20}{100}\right) \text{ रु}$$

= 6000 रु (2)

कुल कर [(1) तथा (2) का योग] = 7000 रु

भविष्य निधि में जमा की गई राशि = (500 × 12) रु = 6000 रु

बचत पर आयकर में छूट = $(6000 \times \frac{20}{100})$ रु = 1200 रु

अतः, देय आयकर = (7000 – 1200) रु = 5800 रु

5 % की दर से आयकर पर अधिभार = $(5800 \times \frac{5}{100})$ रु = 290 रु

कुल देय आयकर = (5800 + 290) रु = 6090 रु

उदाहरण 2 : सविता का मासिक वेतन 12000 रु है। वह 600 रु प्रति मास भविष्य निधि में जमा कराती है और 3000 रु वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम के रूप में देती है। ज्ञात कीजिए कि उसे कितना आयकर देना होगा।

हल : सविता का कुल वार्षिक वेतन = (12000 × 12) रु = 144000 रु

मानक कटौती = 144000 रु का $\frac{1}{3}$ जिसकी अधिकतम सीमा 30000 रु

= 30000 रु

कर योग्य आय = (144000 – 30000) रु = 114000 रु

50000 रु तक आयकर = कुछ नहीं

अगले 10000 रु पर कर = 1000 रु (1)

(114000 – 60000) रु पर 20% की दर से कर

= 54000 रु × $\frac{20}{100}$ = 10800 रु (2)

कुल कर [(1) तथा (2) का योग] = 11800 रु

महिलाओं के लिए कर में छूट = 5000 रु

जीवन बीमा = 3000 रु

भविष्य निधि = 600 × 12 रु = 7200 रु

कुल बचत (भविष्य निधि + जीवन बीमा) = 7200 रु + 3000 रु = 10200 रु

बचत पर 20 % की दर से कर में छूट = $\frac{20}{100} \times 10200$ रु = 2040 रु

कुल छूट = (5000 + 2040) रु = 7040 रु

∴ देय आयकर = (11800 − 7040) रु = 4760 रु

5% की दर से अधिभार = $\frac{5}{100} \times 4760$ रु = 238 रु

कुल देय आयकर = (4760 + 238) रु = 4998 रु

उदाहरण 3 : ऊषा की वेतन से वार्षिक आय 240000 रु है। वह 2000 रु प्रति मास भविष्य निधि में जमा कराती है, 5000 रु वार्षिक जीवन बीमा में प्रीमियम देती है और 15000 रु राष्ट्रीय बचत पत्र में निवेश करती है। वह 5000 रु प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में दान देती है जिस पर 100 % छूट है। परिकलित कीजिए कि वर्ष में उसे कितना आयकर देना होगा।

हल : वेतन से कुल आय = 240000 रु

मानक कटौती = 25000 रु (क्यों?)

प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में दान से कटौती = 5000 रु

कर योग्य आय = (240000 − 25000 − 5000) रु = 210000 रु

कुल आयकर = $\left[19000 + \frac{30}{100}(210000 - 150000)\right]$ रु

$= \left(19000 + \frac{30}{100} \times 60000\right)$ रु

= [19000 + 18000] रु

= 37000 रु

बचत = (2000 × 12 + 5000 + 15000) रु = 44000 रु

बचत पर आयकर में छूट = $(44000 \times \frac{15}{100})$ रु = 6600 रु

महिलाओं के लिए कर में छूट = 5000 रु

कुल छूट = (6600 + 5000) रु = 11600 रु

देय कर = (37000 – 11600) रु = 25400 रु

अधिभार = $25400 \times \frac{5}{100}$ रु = 1270 रु

कुल देय कर = (25400 + 1270) रु = 26670 रु

उदाहरण 4 : यदि उपर्युक्त उदाहरण 3 में, वेतन में से 11 मास तक 2250 रु प्रति मास कर की कटौती की गई हो, तो अंतिम मास में कितना आयकर देय होगा?

हल : कुल देय कर = 26670 रु

11 मास में की गई कर की कटौती = (2250 × 11) रु = 24750 रु

अतः, 12वें, अर्थात् अंतिम मास में कर की कटौती = (26670 – 24750) रु

= 1920 रु

उदाहरण 5 : 67 वर्षीय अहमद को 18000 रु मासिक पेंशन मिलती है। वह 60000 रु सार्वजनिक भविष्य निधि में जमा कराता है और 10000 रु के राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। वह 10000 रु प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में भी दान देता है। परिकलित कीजिए कि उस वर्ष में उसे कितना आयकर देना होगा।

हल : कुल आय = (18000 × 12) रु = 216000 रु

मानक कटौती = 25000 रु (क्यों?)

प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में दान के लिए कटौती = 10000 रु

कुल कर योग्य आय = (216000 – 25000 – 10000) रु = 181000 रु

50000 रु तक कर = कुछ नहीं

अगले 10000 रु पर कर = 1000 रु

अगले 90000 रु पर कर = 18000 रु

अगले (181000 – 150000) रु, अर्थात् 31000 रु पर 30% की दर से कर = 9300 रु

कुल कर = (1000 + 18000 + 9300) रु = 28300 रु

बचत = (60000 + 10000) रु = 70000 रु

बचत के कारण कर में छूट $= 70000 \times \frac{15}{100}$ रु $= 10500$ रु

वरिष्ठ नागरिक के लिए कर में छूट $= 15000$ रु

कुल छूट $= (10500 + 15000)$ रु $= 25500$ रु

दिया जाने वाला कुल कर $= (28300 - 25500)$ रु

$= 2800$ रु

5% की दर से अधिभार $= (2800 \times \frac{5}{100})$ रु $= 140$ रु

कुल देय कर $= (2800 + 140)$ रु $= 2940$ रु

प्रश्नावली 7.1

1. राम की कुल आय (वेतन रूप में) 108000 रु है। वह 600 रु प्रति मास भविष्य निधि में जमा कराता है। उसके द्वारा आयकर के रूप में दी जाने वाली राशि परिकलित कीजिए।

2. गुरबक्श सिंह का मासिक वेतन 14000 रु है। वह प्रति मास 700 रु भविष्य निधि में जमा कराता है और 2000 रु का वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम देता है। उसके द्वारा देय आयकर की राशि परिकलित कीजिए।

3. असलम का मासिक वेतन 26000 रु है। वह वर्ष में कुल 54000 रु सामान्य भविष्य निधि और सार्वजनिक भविष्य निधि में जमा कराता है। वह 16000 रु के राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। वह 8000 रु एक धर्मार्थ ट्रस्ट में दान देकर उस पर 50% की कटौती प्राप्त करता है। उसके द्वारा दी गई आयकर की राशि निकालिए।

4. अनिल का मासिक वेतन 50000 रु है। वह 3000 रु मासिक भविष्य निधि में जमा कराता है और 15000 रु वार्षिक जीवन बीमा प्रीमियम के रूप में देता है। वह 14000 रु के राष्ट्रीय बचत पत्र खरीदता है। वह 8000 रु प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में देता है और 5000 रु उस स्कूल को दान के रूप में देता है जहाँ वह पढ़ा था। इन दोनों दान राशियों पर उसे क्रमशः 100% और 50% की कटौतियाँ प्राप्त होती हैं। उस वर्ष इसे कितना आयकर देना पड़ेगा?

5. कार्तिका का मासिक वेतन 12600 रु है। वह 11000 रु सामान्य भविष्य निधि में जमा कराती है और 500 रु राष्ट्रीय बचत पत्रों में निवेश करती है। वह 5100 रु एक आयुर्विज्ञान अनुसंधान केंद्र में दान देकर उस पर 100% की कटौती प्राप्त करती है। परिकलित कीजिए कि उसे कितना आयकर देना पड़ेगा।

6. राज रानी को 9000 रु प्रति मास पेंशन मिलती है। यदि वह कोई बचत नहीं करती, तो उसे कितना आयकर देना पड़ेगा?

7. श्याम 71 वर्षीय वरिष्ठ नागरिक है। वह एक निजी फर्म में काम करता है और 16000 रु मासिक वेतन पाता है। वह सार्वजनिक भविष्य निधि में 45000 रु जमा कराता है और 3100 रु प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में दान देता है (दान राशि पर 100 % कटौती)। उसे कितना आयकर देना होगा?

8. अवतार सिंह का मासिक वेतन 55000 रु है। वह 5000 रु मासिक भविष्य निधि में जमा कराता है और जीवन बीमा के दो अर्धवार्षिक प्रीमियम देता है जिनमें से प्रत्येक की राशि 3000 रु है। वह 20000 रु इंफ्रास्ट्रक्चर बाँडों में निवेश करता है। उसके द्वारा दिए जाने वाले आयकर का परिकलन कीजिए।

9. उपर्युक्त प्रश्न 8 में यदि आयकर के रूप में 15000 रु 11 मास तक उसके मासिक वेतन से काटे जा रहे हों, तो वर्ष के अंतिम मास में कितना आयकर काटा जाएगा?

10. सीता का मासिक वेतन 19250 रु है। वह 2500 रु प्रति मास सामान्य भविष्य निधि में और 20000 रु सार्वजनिक भविष्य निधि में जमा कराती है। वह 11000 रु एक स्कूल को दान करती है; उस पर 50% की कटौती प्राप्त करती है। यदि उसके वेतन में से आयकर के रूप में प्रति मास 1700 रु 11 मास के लिए काटे गए हों, तो वर्ष के अंतिम मास में काटे जाने वाले आयकर का परिकलन कीजिए।

11. सुदेश का मासिक वेतन 30000 रु है। वह 3000 रु मासिक सामान्य भविष्य निधि में और 34000 रु सार्वजनिक भविष्य निधि में जमा कराती है। वह 30000 रु इंफ्रास्टक्चर बाँडों में भी निवेश कराती है, जिससे उसे 100000 रु तक की बचत पर कर में छूट मिलती है। वह 11000 रु प्रधानमंत्री राष्ट्रीय राहत कोष में और 5000 रु उस कॉलेज में देती है, जहाँ वह पढ़ी थी। इन राशियों पर उसे क्रमशः 100% और 50% की कटौतियाँ मिलती हैं। यदि उसके वेतन में से 11 मास तक आयकर के रूप में 4500 रु काटे जाते रहे हों, तो वर्ष के अंतिम मास में काटा गया आयकर ज्ञात कीजिए।

12. राजेंदर कौर का मासिक वेतन 15400 रु है। वह प्रति मास 1000 रु भविष्य निधि में और जीवन बीमा के 1000 रु वाले त्रैमासिक प्रीमियम देती है। वह 3100 रु आयुर्विज्ञान अनुसंधान केन्द्र में दान के रूप में देकर उस पर 100 % की कटौती प्राप्त करती है। उसे कितना आयकर देना पड़ा?

13. एक वरिष्ठ नागरिक की वार्षिक पेंशन 141600 रु है। ज्ञात कीजिए कि क्या उसे कुछ आयकर देना होगा। यदि हाँ, तो कितना आयकर देना होगा?

14. सुब्रह्मण्यम् का वार्षिक वेतन 95300 रु है। वह 4800 रु सामान्य भविष्य निधि में तथा 1200 रु की जीवन बीमा किस्त देता है। इस वर्ष में उसके द्वारा देय कुल आयकर परिकलित कीजिए।

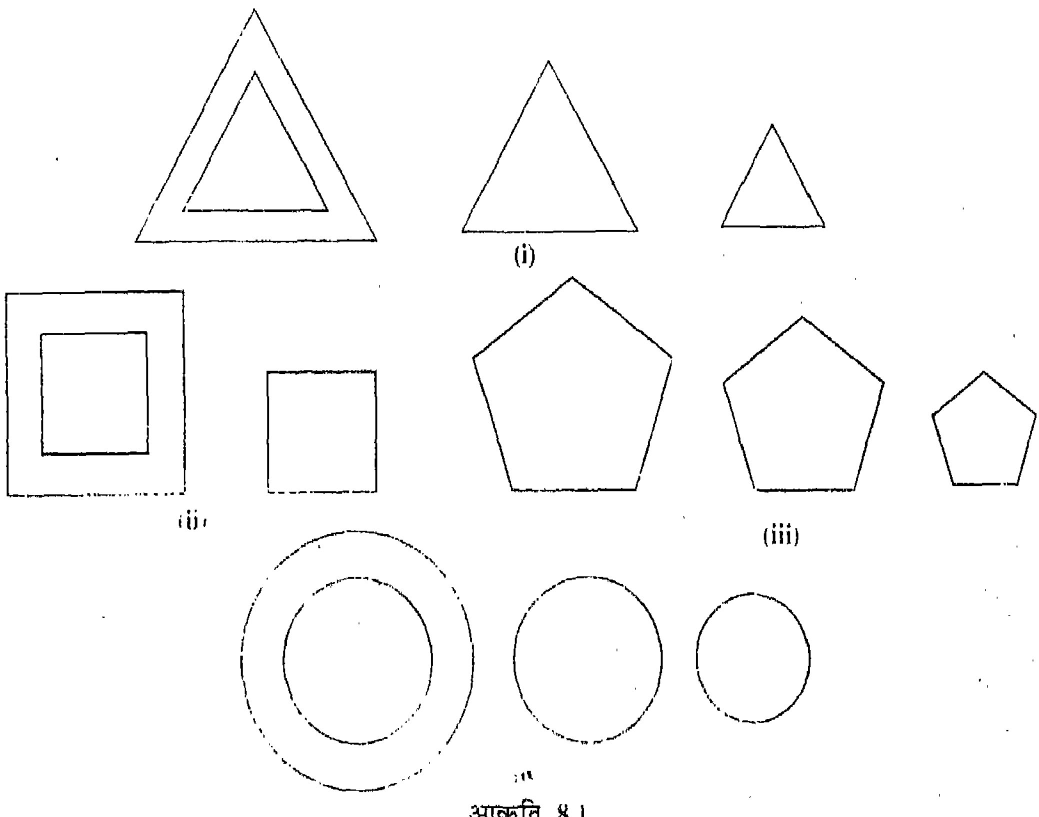
अध्याय 8

समरूप त्रिभुज

8.1 भूमिका

हम पिछली कक्षाओं में दो ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता के संबंध में पढ़ चुके हैं। हम दो त्रिभुजों के सर्वांगसम होने के कुछ नियमों का भी अध्ययन कर चुके हैं। स्मरण कीजिए कि दो सर्वांगसम आकृतियों के 'समान आकार (shape)' तथा 'समान माप (size)' होते हैं। अब हम उन आकृतियों के बारे में पढ़ेंगे जो 'समान आकार' की तो हैं, परंतु यह आवश्यक नहीं है कि वे 'समान माप' की भी हों। ऐसी आकृतियों को *समरूप (similar)* कहते हैं। यह स्पष्ट है कि दो सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं, परंतु यह आवश्यक नहीं है कि इसका विलोम भी सत्य हो।

आइए हम निम्न आकृतियों को देखें (आकृति 8.1) :

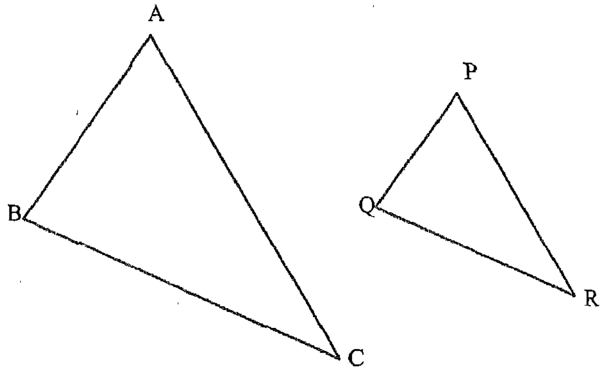


आकृति 8.1

आकृति 8.1 (i) में, चार समबाहु त्रिभुज विभिन्न मापों के हैं। क्या वे समान आकार के हैं? क्या वे समरूप हैं ? आकृति 8.1 (ii) में, विभिन्न मापों के तीन वर्ग हैं। क्या उनके आकार समान हैं ? क्या वे समरूप हैं ? आकृति 8.1 (iii) में, विभिन्न मापों के तीन सम पंचभुज हैं। क्या वे समान आकार के हैं ? क्या वे समरूप हैं ? आकृति 8.1 (iv) में, चार वृत्तों के माप भिन्न हैं। क्या उनके आकार समान हैं ? क्या वे समरूप हैं ? उपर्युक्त सभी प्रश्नों का उत्तर स्पष्ट रूप से 'हाँ' है। हम उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

सभी समान संख्या की भुजाओं के सम बहुभुज, जैसे की समबाहु त्रिभुज, वर्ग इत्यादि, समरूप होते हैं। विशेष तौर पर, सभी वृत्त भी समरूप होते हैं।

क्या वृत्त तथा त्रिभुज अथवा त्रिभुज और वर्ग एक ही आकार के होते हैं? स्पष्टत: नहीं। इन प्रश्नों का उत्तर हम केवल आकृति देखकर दे सकते हैं। आइए अब हम आकृति 8.2 में दिए दो त्रिभुजों ABC तथा PQR को देखें। ये आकृतियाँ समरूप दिखती हैं, परंतु हम इनके बारे में स्पष्ट रूप से नहीं कह सकते हैं। इसलिए, आकृतियों की सर्वांगसमता की तरह, हमें समरूपता की स्पष्ट परिभाषा करनी होगी और उस परिभाषा पर आधारित कुछ अनुकूल नियम बनाने होंगे जिससे कि हम निर्णय कर सकें कि दो दी गई आकृतियाँ समरूप हैं या नहीं।



आकृति 8.2

8.2 समरूप बहुभुज

अब आपको समरूपता का अभिप्राय कुछ समझ में आ गया होगा। वास्तव में, सभी जीवित प्राणियों में समरूपता के ज्ञान की कुछ भावना होती है। आपने किसी व्यक्ति के अथवा एक ही वस्तु के या एक ही आकृति के फोटो-चित्रों को विभिन्न मापों में एक ही निगेटिव से बने देखा होगा। फोटोग्राफर क्या करता / करती है, जब वह विभिन्न साइजों के फोटो को बनाता / बनाती है। वह बहुधा फोटो को, छोटे साइज के फिल्म जिसको हम 35 मिमी माप कहते हैं, खींचता / खींचती है और फिर उसको बड़े माप जैसे 45 मिमी या 55 मिमी के फिल्म पर बढ़ा देता / देती है। इस प्रकार, यदि हम छोटे फोटो (आकृति) के किसी रेखाखंड पर विचार करें, तो बड़ी आकृति में संगत रेखाखंड उस रेखाखंड का $\frac{45}{35}$ या $\frac{55}{35}$ होगा। वास्तव में, इसका अर्थ यह है कि छोटे चित्र

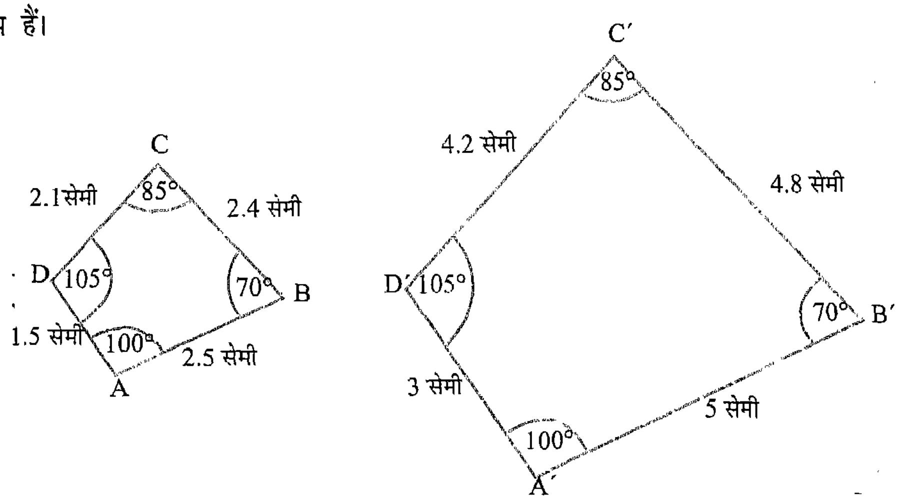
के प्रत्येक रेखाखंड को फोटोग्राफर समान अनुपात, अर्थात् 35 : 45 या 35 : 55 में बढ़ा देता है (अथवा बड़े फोटो के प्रत्येक रेखाखंड को समान अनुपात में कम कर देता है)। पुनः यदि हम दो संगत रेखाखंड-युग्म के झुकाव (कोण) का विचार अलग-अलग मापों के दो फोटो के लिए करें, तो हम देखेंगे कि दोनों कोण बराबर हैं। यही दो बहुभुजों के समरूप होने का मूल सार है। हम कहते हैं कि :

दो बहुभुज जिनके भुजाओं की संख्या समान है समरूप होते हैं, यदि

(i) *उनके संगत कोण बराबर (समानकोणिक) हों, और*

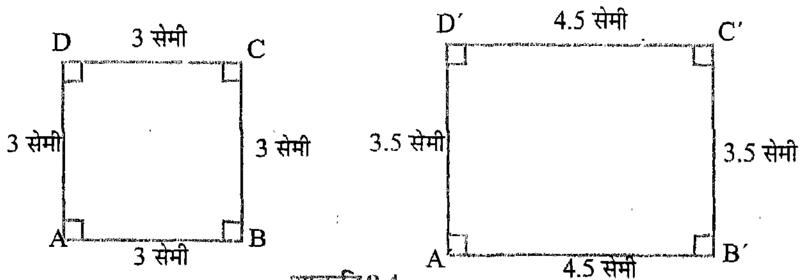
(ii) *उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में (या समानुपाती) हों।*

इस प्रकार, हम सरलता से कह सकते हैं कि आकृति 8.3 के चतुर्भुज ABCD और A′B′C′D′ समरूप हैं।



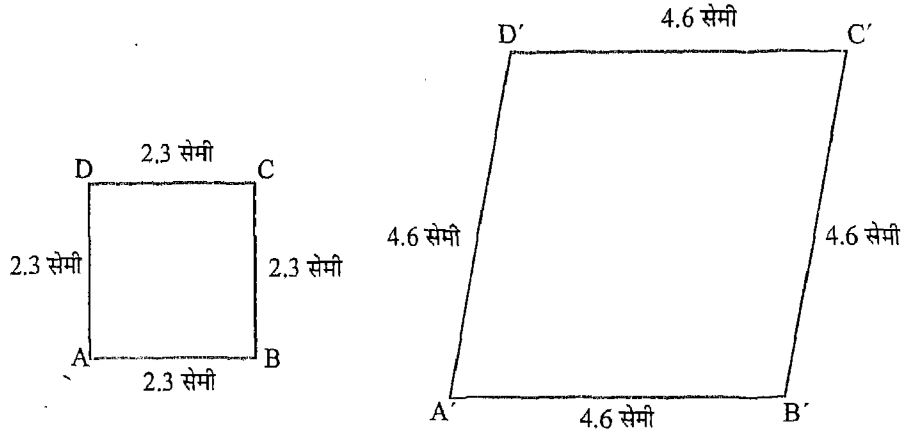
आकृति 8.3

ध्यान दीजिए कि आकृति 8.4 में, दोनों आकृतियों (वर्ग और आयत) के संगत कोण बराबर हैं, परंतु उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में नहीं हैं। अतः, दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं हैं।



आकृति 8.4

इसी प्रकार, हम देख सकते हैं कि आकृति 8.5 में दोनों आकृतियों (वर्ग और समचतुर्भुज) की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं, परंतु उनके संगत कोण बराबर नहीं हैं। अतः, दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं हैं। इस प्रकार, दोनों प्रतिबंधों (i) और (ii) में से केवल एक प्रतिबंध, बिना दूसरे प्रतिबंध के, बहुभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त नहीं है।



आकृति 8.5

टिप्पणी : यह स्पष्ट है कि यदि एक बहुभुज दूसरे बहुभुज के समरूप हो तथा दूसरा बहुभुज तीसरे बहुभुज के समरूप हो, तो पहला बहुभुज तीसरे के समरूप होगा।

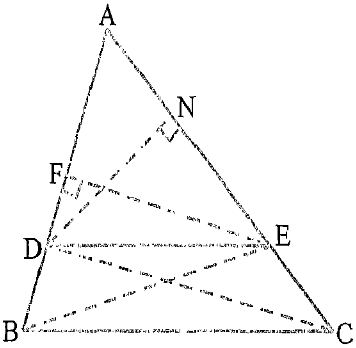
चूंकि त्रिभुज भी एक बहुभुज है, इसलिए सामान्यतः बहुभुज की समरूपता के यही प्रतिबंध त्रिभुज की समरूपता के लिए भी लागू होते हैं। दूसरे शब्दों में, दो त्रिभुज समरूप होंगे यदि

(i) *उनके संगत कोण बराबर हों, तथा*

(ii) *उनकी संगत भुजाओं का अनुपात समान हो (आनुपातिक हों)*

प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ थेल्स (600 ई० पू०) ने समानकोणिक त्रिभुजों के संबंध में एक महत्त्वपूर्ण सत्य उद्घाटित किया था, जो निम्न प्रकार है :

समानकोणिक त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान होता है, चाहे उनके माप (साइज) कुछ भी हों। ऐसा विश्वास किया जाता है कि इसे सिद्ध करने में उन्होंने एक आधारभूत प्रमेय का उपयोग किया जिसे *आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय* (*Basic Proportionality Theorem*) कहते हैं (इसे थेल्स प्रमेय से भी जाना जाता है)। अगले अनुच्छेद में, हम इस प्रमेय तथा उसके विलोम की चर्चा करेंगे।



आकृति 8.6

8.3 आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय

प्रमेय 8.1 *यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए कोई रेखा खींचें, तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।*

दिया है : Δ ABC जिसमें BC के समांतर एक रेखा AB को D पर तथा AC को E पर प्रतिच्छेदित करती है (आकृति 8.6)।

सिद्ध करना है : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना : BE, CD को मिलाइए और EF ⊥ AB, DN ⊥ AC खींचिए।

उपपत्ति : आइए अनुपात $\frac{ar\,(\Delta ADE)}{ar\,(\Delta BDE)}$ पर विचार करें, जहाँ $ar\,(\Delta ADE)$ का अर्थ Δ ADE का क्षेत्रफल है।

अब,
$$\frac{ar\,(\Delta ADE)}{ar\,(\Delta BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EF}{\frac{1}{2} \times BD \times EF} = \frac{AD}{BD} \qquad (1)$$

इसी प्रकार,
$$\frac{ar\,(\Delta ADE)}{ar\,(\Delta CDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DN}{\frac{1}{2} \times EC \times DN} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

परंतु
$$ar\,(\Delta BDE) = ar\,(\Delta CDE) \qquad (3)$$

(क्योंकि दोनों त्रिभुज समान आधार DE पर और समान समांतर रेखाओं DE और BC के मध्य स्थित हैं)

∴
$$\frac{ar\,(\Delta ADE)}{ar\,(\Delta BDE)} = \frac{ar\,(\Delta ADE)}{ar\,(\Delta CDE)} \qquad [(3) \text{ से}] \qquad (4)$$

अतः,
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \qquad [(1), (2) \text{ और } (4) \text{ से}]$$

उपप्रमेय : हमें ज्ञात है : $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (1)

∴
$$\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{AE}{EC} + 1 \qquad (\text{दोनों ओर 1 जोड़ने पर})$$

या $$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$$

या $$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$$

या $$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC} \quad \text{(व्युत्क्रम लेने पर)} \qquad (2)$$

(1) और (2) को गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{AD}{DB}\times\frac{DB}{AB}=\frac{AE}{EC}\times\frac{EC}{AC}$$

या $$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

इस प्रकार, *यदि* ΔABC *में* BC *के समांतर एक रेखा अन्य दोनों भुजाओं* AB *और* AC *को क्रमशः बिंदुओं* D *और* E *पर प्रतिच्छेद करे, तो*

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

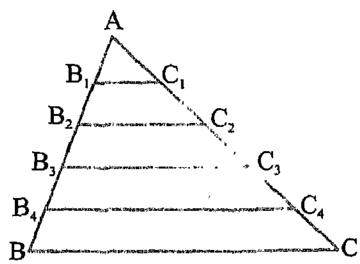
आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का विलोम :

आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का विलोम भी सत्य है। इसके लिए, आइए निम्न क्रियाकलाप करें। कोई त्रिभुज ABC खींचिए और उसकी भुजा AB और AC किसी भी संख्या में बराबर भागों में बाँटिए (मान लीजिए 5 भाग), जैसा कि आकृति 8.7 में दर्शाया गया है।

आइए अब हम B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 और B_4C_4 को मिलाएँ।

स्पष्टतः, $$\frac{AB_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{C_1C}=\frac{1}{4}\text{।}$$

रेखाओं B_1C_1 और BC के संबंध में क्या कह सकते हैं?
हम देखते हैं कि $B_1C_1 \parallel BC$ ।
हम $B_1C_1 \parallel BC$ की यथार्थता संगत कोणों B_1 और B को मापकर तथा $\angle B_1 = \angle B$ पाकर प्रमाणित कर सकते हैं।



आकृति 8.7

इसी प्रकार, हम देख सकते हैं कि

$$\frac{AB_2}{B_2B}=\frac{AC_2}{C_2C}=\frac{2}{3} \text{ तथा } B_2C_2 \parallel BC,$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2} \text{ तथा } B_3C_3 \parallel BC,$$

और
$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1} \text{ तथा } B_4C_4 \parallel BC।$$

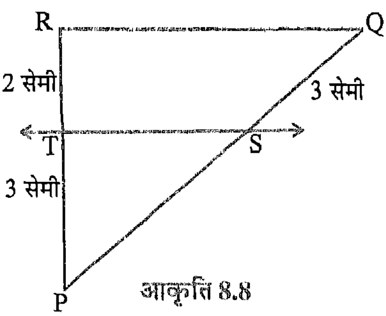
हम AB और AC को किसी भी संख्या में बराबर भागों में विभाजित कर इस क्रियाकलाप को दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हम एक ही निष्कर्ष पर पहुँचेंगे। इस प्रकार, हम प्रमेय 8.1 का निम्न विलोम प्राप्त करते हैं:

गुणधर्म 8.1 : *यदि कोई रेखा किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती हो, तो यह रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।*

टिप्पणी : इस विलोम को इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं कि हम यह मान लें कि रेखा तीसरी भुजा के समांतर नहीं है और फिर एक विरोधाभास प्राप्त करें।

अब हम कुछ उदाहरणों की सहायता से उपर्युक्त परिणामों का प्रयोग स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1 : आकृति 8.8 में यदि ST || QR है, तो PS निकालिए।



आकृति 8.8

हल : मान लीजिए PS = x सेमी है।

क्योंकि ST || QR है, इसलिए

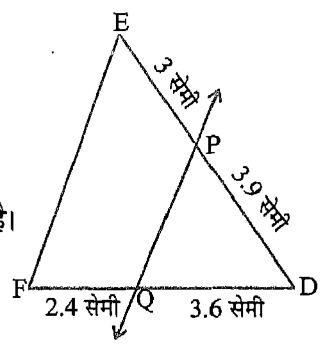
$$\frac{PS}{QS} = \frac{PT}{RT} \qquad \text{(प्रमेय 8.1)}$$

या
$$\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$$

या
$$x = \frac{9}{2}$$

इस प्रकार, $PS = \frac{9}{2}$ सेमी

उदाहरण 2 : आकृति 8.9 के लिए बताइए कि क्या PQ || EF है।

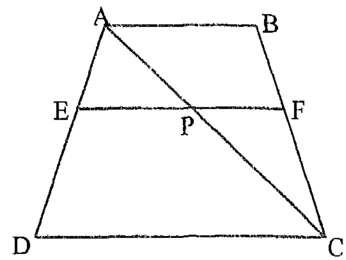


आकृति 8.9

हल : $\frac{DP}{PE} = \frac{3.9}{3} = \frac{13}{10}$ और $\frac{DQ}{QF} = \frac{3.6}{2.4} = \frac{3}{2}$

चूंकि $\frac{DP}{PE} \neq \frac{DQ}{QF}$ है,

इसलिए PQ, EF के समांतर नहीं है।



आकृति 8.10

उदाहरण 3 : आकृति 8.10 में, EF || AB || DC है।

सिद्ध कीजिए कि $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$।

हल : ΔADC से, हम पाते हैं :

EP || DC (EF || DC दिया है)

$\therefore \quad \frac{AE}{ED} = \frac{AP}{PC}$ (प्रमेय 8.1) (1)

साथ ही, ΔCAB से हमें मिलता है :

FP || BA (EF || AB दिया है)

$\therefore \quad \frac{BF}{FC} = \frac{AP}{PC}$ (2)

इसलिए (1) और (2) से,

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

उदाहरण 4 : आकृति 8.11 में, यदि $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ और $\angle CDE = \angle CED$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि ΔCAB समद्विबाहु है।

हल : चूंकि $\frac{AD}{DC} = \frac{BE}{EC}$, इसलिए DE || AB (गुणधर्म 8.1 से)

$\therefore \quad \angle CDE = \angle A$

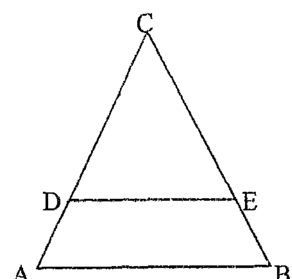
तथा $\angle CED = \angle B$ (संगत कोण)

परंतु $\angle CDE = \angle CED$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle A = \angle B$

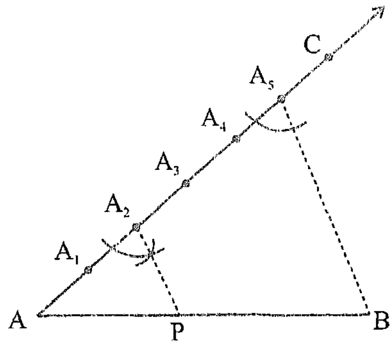
$\therefore \quad CB = CA$ (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

अतः, Δ CAB समद्विबाहु है।



आकृति 8.11

उदाहरण 5 : एक रेखाखंड AB को आंतरिक रूप से एक दिए हुए अनुपात, मान लीजिए 2 : 3, में विभाजित कीजिए।



आकृति 8.12

हल : हमें एक रेखाखंड AB दिया है। हमें रेखाखंड AB पर एक बिंदु P इस प्रकार ज्ञात करना है कि PA : PB = 2 : 3 हो। इस रचना के लिए हम निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं :

चरण 1 : एक किरण AC खींचिए और उस पर पाँच (2 + 3) बिंदुओं A_1, A_2, A_3, A_4 और A_5 को बराबर दूरी पर चिह्नित कीजिए, अर्थात् $A A_1 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 = A_4 A_5$ हो (आकृति 8.12)।

चरण 2 : A_5B को मिलाइए।

चरण 3 : A_2 (दूसरे बिंदु) से, एक रेखा A_5B के समांतर खींचिए जो AB को P पर प्रतिच्छेद करे।

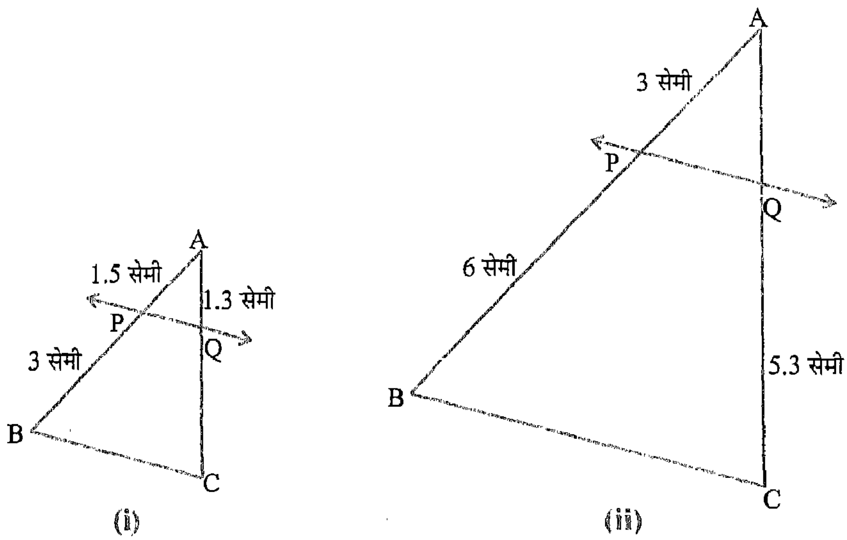
तब P ही अभीष्ट बिंदु होगा।

टिप्पणी : हम उपर्युक्त तथ्य को आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कर सकते हैं।

प्रश्नावली 8.1

1. किसी ΔPQR की भुजाओं PQ और PR पर क्रमशः M और N बिंदु हैं। निम्नलिखित प्रत्येक स्थितियों में, ज्ञात कीजिए कि क्या $MN \parallel QR$ है :
   (i) PM = 4 सेमी, QM = 4.5 सेमी, PN = 4 सेमी, NR = 4.5 सेमी
   (ii) PQ = 1.28 सेमी, PR = 2.56 सेमी, PM = 0.16 सेमी, PN = 0.32 सेमी

2. यदि आकृति 8.13 (i) और (ii) में, $PQ \parallel BC$ हो, तो (i) में QC और (ii) में AQ ज्ञात कीजिए।

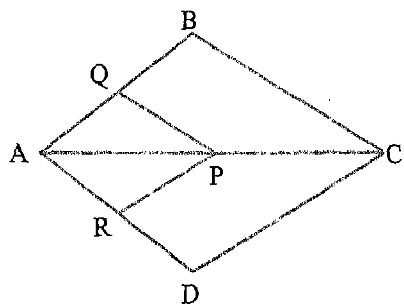


आकृति 8.13

3. आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य-बिंदु से दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

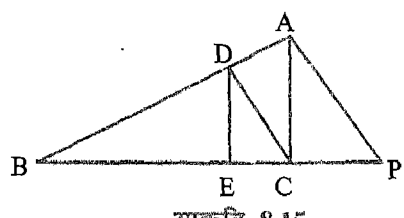
4. आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा, तीसरी भुजा के समांतर होती है।

5. आकृति 8.14 में, यदि $PQ \parallel BC$ तथा $PR \parallel CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ है।



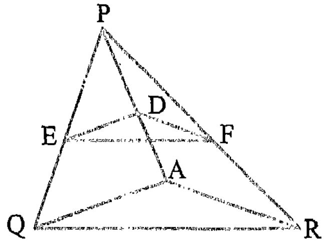
आकृति 8.14

6. आकृति 8.15 में, $DE \parallel AC$ और $DC \parallel AP$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ है।



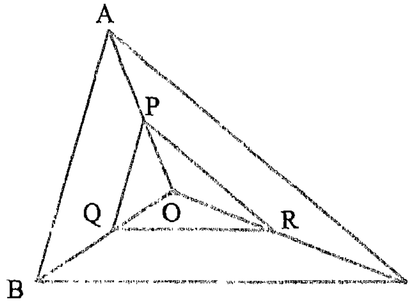
आकृति 8.15

7. आकृति 8.16 में, DE || AQ और DF || AR है। सिद्ध कीजिए कि EF || QR है।



आकृति 8.16

8. आकृति 8.17 में, PQ || AB और PR || AC है। सिद्ध कीजिए कि QR || BC है।



आकृति 8.17

9. एक समलंब ABCD में, AB || CD है। उसके विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$ है।

[**संकेत :** O से एक रेखा AB या CD के समांतर खींचिए।]

10. किसी चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को बिंदु O पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित करते हैं कि $\frac{AO}{OC}=\frac{BO}{OD}$ है। सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज ABCD एक समलंब है।

11. सिद्ध कीजिए कि समलंब की समांतर भुजाओं के समांतर कोई रेखा, उन भुजाओं को जो समांतर नहीं हैं, आनुपातिकता (अर्थात् समान अनुपात) में विभाजित करती है।

12. यदि तीन या अधिक समांतर रेखाएँ दो तिर्यक रेखाओं से प्रतिच्छेदित होती हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके द्वारा तिर्यक रेखाओं पर काटे गए अंत:खंड (intercepts) आनुपातिक होते हैं।

[**टिप्पणी :** इस परिणाम को सामान्यतः *आनुपातिकता अंत:खंड गुणधर्म* कहते हैं।]

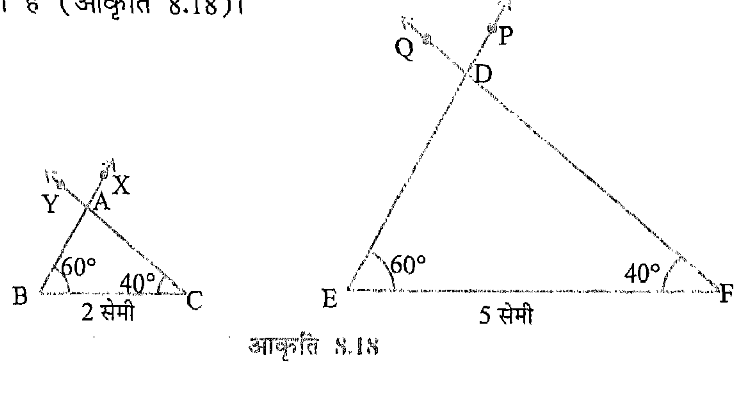
13. एक रेखाखंड 10 सेमी लंबाई का खींचिए और उसको 3 : 4 के आंतरिक अनुपात में विभाजित कीजिए।

8.4 दो त्रिभुजों की समरूपता की कसौटियाँ

हम पहले कह चुके हैं कि दो त्रिभुज समरूप होते हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों, और (ii) उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों। अर्थात् यदि दो त्रिभुजों ABC और PQR में,

(i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ तथा (ii) $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ हो, तब दोनों त्रिभुज समरूप होंगे। यहाँ A, P के संगत है, B,Q के संगत है तथा C,R के संगत है। सांकेतिक रूप में, हम ऊपर के संबंध को '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' लिखते हैं, और पढ़ते हैं कि 'ΔABC समरूप है ΔPQR के।' सर्वांगसमता की स्थिति की तरह, समरूपता में भी समरूप त्रिभुजों को उनके संगत शीर्षों के सही क्रम में लिखते हैं। उदाहरणतः, उपर्युक्त स्थिति में $\Delta ABC \sim \Delta QRP$ या $\Delta ABC \sim \Delta RPQ$, इत्यादि लिखना सही नहीं है। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है : क्या दो त्रिभुजों की समरूपता का निर्धारण करने के लिए हमें हमेशा दोनों त्रिभुजों के संगत कोणों की समानता तथा संगत भुजाओं के आनुपातिक संबंधों को देखना होगा? स्मरण कीजिए कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, हमने कुछ कसौटियाँ निर्धारित की थीं, जिसमें त्रिभुज के अवयवों के केवल तीन युग्म लिए थे। हम यहाँ भी ऐसी निश्चित कसौटियों पर पहुँचने का प्रयास करेंगे जिनमें दो त्रिभुजों की समरूपता स्थापित करने के लिए त्रिभुजों के कुछ कम अवयवों की ही आवश्यकता हो। इसके लिए आइए हम कुछ क्रियाकलाप करें।

आइए दो रेखाखंड BC और EF पृथक् लंबाइयों (मान लीजिए क्रमशः 2 सेमी तथा 5 सेमी) के खींचें। B और E पर किसी भी माप, मान लीजिए 60°, के कोण XBC तथा PEF तथा C और F पर, मान लीजिए 40°, के कोण YCB और QFE की रचना कीजिए। मान लीजिए भुजाएँ BX और CY एक-दूसरे को A पर प्रतिच्छेदित करती हैं और भुजाएँ EP तथा FQ, D पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 8.18)।



आकृति 8.18

इस प्रकार, हमें दो त्रिभुज ABC और DEF प्राप्त होते हैं। आप $\angle A$ और $\angle D$ के संबंध में क्या कह सकते हैं? स्पष्टत: ये दोनों प्रत्येक $80°$ के हैं। इस प्रकार, त्रिभुजों ABC और DEF में, हमें $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ मिलता है, अर्थात् संगत कोण बराबर हैं। आइए हम AB, AC, DE, DF की माप ज्ञात करें और अनुपात $\frac{AB}{DE}, \frac{AC}{DF}$ तथा $\frac{BC}{EF}$ ज्ञात करें। आप क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि दोनों अनुपात $\frac{AB}{DE}$ और $\frac{AC}{DF}$, 0.4 (या उसके बहुत अधिक निकट), अर्थात् $\frac{2}{5}$ के बराबर हैं। इस प्रकार, $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}\left(=\frac{2}{5}\right)$ है, अर्थात् संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं और इसीलिए त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हैं। हम इस क्रियाकलाप को ऐसे अनेक त्रिभुजों के युग्म बनाकर जिनके संगत कोण बराबर हों तथा उनकी संगत भुजाओं के अनुपात को निकालकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हम एक ही निष्कर्ष पर पहुँचेंगे। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 8.2 : *यदि दो त्रिभुजों में संगत कोण बराबर हों, तो उनकी संगत भुजाएँ आनुपातिक होती हैं (अर्थात् उनका अनुपात समान होता है), और इस प्रकार दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।*

इस गुणधर्म को दो त्रिभुजों की *कोण-कोण-कोण (AAA) समरूपता कसौटी* कहते हैं।

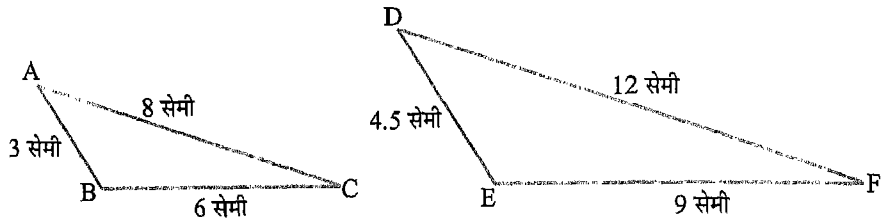
टिप्पणियाँ :

1. गुणधर्म 8.2 को हम एक त्रिभुज की दो भुजाओं के बराबर रेखाखंड दूसरे त्रिभुज के संगत भुजाओं से काटकर और आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का प्रयोग करके, सिद्ध कर सकते हैं।

2. चूंकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ है, अत: यदि किसी त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों के बराबर हों, तो उनके तीसरे कोण स्वत: बराबर होंगे। इस प्रकार, हम गुणधर्म 8.2 का निम्न उप-गुणधर्म पाते हैं :

उप-गुणधर्म : *यदि किसी त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।* इसे दो त्रिभुजों की समरूपता की *कोण-कोण (AA) कसौटी* कहते हैं।

आइए अब हम दो त्रिभुजों ABC और DEF की रचना करें जिनकी भुजाएँ क्रमश: 3 सेमी, 6 सेमी और 8 सेमी तथा 4.5 सेमी, 9 सेमी और 12 सेमी हों (आकृति 8.19)।



आकृति 8.19

यहाँ हम देखते हैं कि $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}\left(=\frac{2}{3}\right)$ है, अर्थात् दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हैं। इनके संगत कोणों के बारे में हम क्या कह सकते हैं? हम कोणों A और D, B और E, तथा C और F की तुलना चाँदे या अक्स कागज की सहायता से कर सकते हैं। हम देखेंगे कि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और $\angle C = \angle F$ है। अर्थात् संगत कोण बराबर हैं और इस प्रकार दोनों त्रिभुज ABC और DEF समरूप हैं। हम इस क्रियाकलाप को कई त्रिभुजों के युग्मों को जिनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों और उनके संगत कोणों की तुलना कर दोहरा सकते हैं। हम प्रत्येक बार एक ही परिणाम पाएँगे। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 8.3 : *यदि दो त्रिभुजों की भुजाएँ आनुपातिक हों (अर्थात् समान अनुपात में हों), तब उनके संगत कोण बराबर होंगे और इस प्रकार दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।*

इस गुणधर्म को दो त्रिभुजों की *भुजा-भुजा-भुजा (SSS) समरूपता कसौटी* कहते हैं।

टिप्पणियाँ :

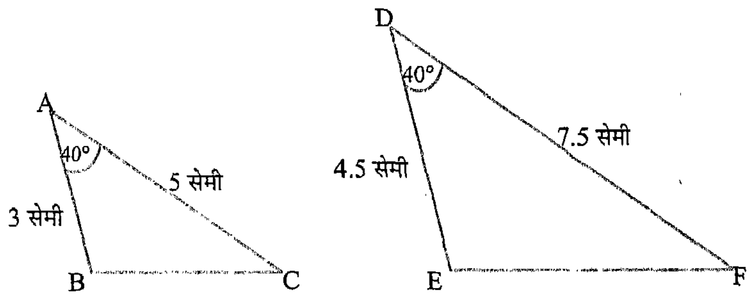
1. इस गुणधर्म को हम एक त्रिभुज की भुजाओं के बराबर दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं से दो रेखाखंड काटकर और आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय के विलोम का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।

2. स्मरण रखिए कि दोनों में से कोई एक प्रतिबंध (i) संगत कोण बराबर हों और (ii) संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों, बहुभुजों के समरूप होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध नहीं है। परंतु गुणधर्म 8.2 और गुणधर्म 8.3 के आधार पर हम सुगमता से कह सकते हैं कि दो त्रिभुजों के समरूप होने की दशा में दोनों प्रतिबंधों की पुष्टि करना आवश्यक नहीं है, क्योंकि एक प्रतिबंध से दूसरा प्रतिबंध स्वत: ही प्राप्त हो जाता है।

आइए हम दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के विभिन्न प्रतिबंधों का, जो हम पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं, स्मरण करें। हम ध्यान दें कि समरूपता की भुजा-भुजा-भुजा (SSS) कसौटी की एक प्रकार से दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की *भुजा-भुजा-भुजा* कसौटी से तुलना की जा सकती है तथा

समरूपता की *कोण-कोण (AA)* या कोण-कोण-कोण (AAA) कसौटी की तुलना, सर्वांगसमता की *कोण-भुजा-कोण* (ASA) या (AAS) कसौटी से की जा सकती है। यह हमें सुझाव देता है कि हम समरूपता की एक कसौटी प्राप्त करें और उसकी तुलना सर्वांगसमता की *भुजा-कोण-भुजा* (SAS) कसौटी से करें। आइए इसके लिए हम निम्न क्रियाकलाप करें :

आइए, हम दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार बनाएँ कि AB = 3 सेमी, AC = 5 सेमी, $\angle A = 40°$, DE = 4.5 सेमी, DF = 7.5 सेमी और $\angle D = 40°$ हो (आकृति 8.20)।



आकृति 8.20

आप देख सकते हैं कि इन दोनों त्रिभुजों में, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$ तथा $\angle A$ (भुजाओं AB और AC के अंतर्गत) = $\angle D$ (भुजाओं DE और DF के अंतर्गत)। अर्थात् किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर है और इन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ आनुपातिक (अर्थात् समान अनुपात में) हैं। आइए हम कोण B और E की तुलना (अथवा C और F की) अक्स कागज या चाँदे का प्रयोग करके करें। हम पाएँगे कि $\angle B = \angle E$ (तथा $\angle C = \angle F$) है। इसलिए, समरूपता की AA कसौटी से दोनों त्रिभुज ABC तथा DEF समरूप हैं। ध्यान दीजिए कि हम दो त्रिभुजों की समरूपता BC और EF को माप कर तथा

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2}{3}$$

का प्रेक्षण करके भी प्राप्त कर सकते हैं।

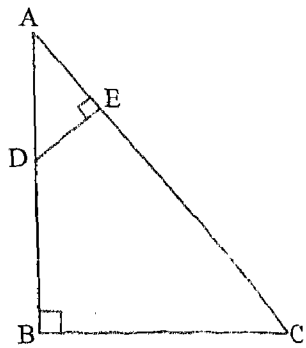
हम इस क्रियाकलाप को अनेक त्रिभुजों के युग्मों को लेकर जिनमें एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के कोण के बराबर लेकर और इन कोणों को अंतर्विष्ट (include) करने वाली भुजाओं को आनुपातिक लेकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हमको वही परिणाम मिलेगा। इस प्रकार, हम

पाते हैं :

गुणधर्म 8.4 : *यदि किसी त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के किसी कोण के बराबर हो और उन कोणों को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाएँ आनुपातिक हों, तो त्रिभुज समरूप होते हैं।*

इस गुणधर्म को दो त्रिभुजों की *भुजा-कोण-भुजा (SAS) समरूपता कसौटी* कहते हैं।

टिप्पणी : इस गुणधर्म को हम एक त्रिभुज के एक दिए हुए कोण को अंतर्विष्ट करने वाली दो भुजाओं से, दूसरे त्रिभुज के दिए हुए संगत कोण को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाओं के बराबर रेखाखंडों को काटकर और कोण-कोण (AA) समरूपता कसौटी का प्रयोग करके सिद्ध कर सकते हैं।



आकृति 8.21

आइए अब त्रिभुजों की समरूपता की उपर्युक्त कसौटियों का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 6 : आकृति 8.21 में, $AB \perp BC$ और $DE \perp AC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta AED$ है।

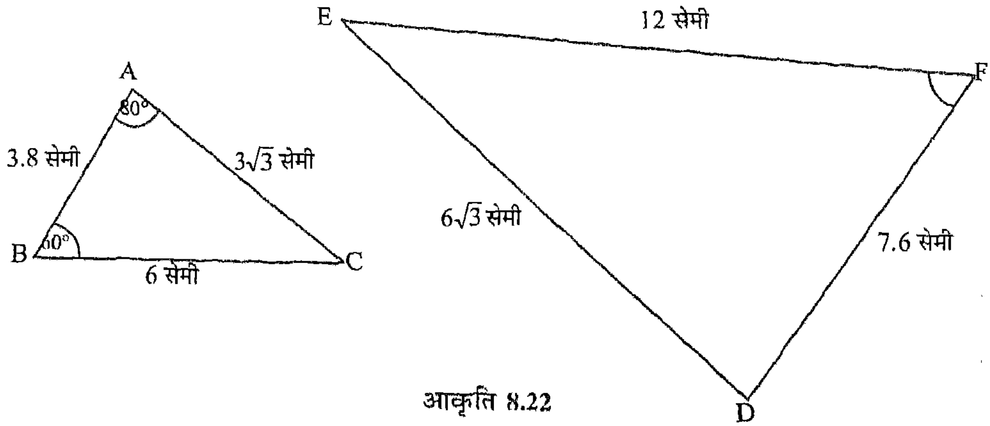
हल : त्रिभुजों ABC और ADE में, हमें प्राप्त है :

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

और $\angle B = \angle E$ (दोनों 90° हैं, क्योंकि $AB \perp BC$ और $DE \perp AC$ दिया है)

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta AED$ (कोण-कोण समरूपता)

उदाहरण 7 : आकृति 8.22 में, $\angle F$ ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.22

हल : त्रिभुजों ABC तथा DEF में, हमें ज्ञात है :

$$\frac{AB}{DF}=\frac{3.8}{7.6}=\frac{1}{2}$$

इसी प्रकार, $\frac{BC}{FE}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ और $\frac{AC}{DE}=\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

अर्थात् दोनों त्रिभुजों में भुजाएँ आनुपातिक हैं। अब सही संगतता का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है :

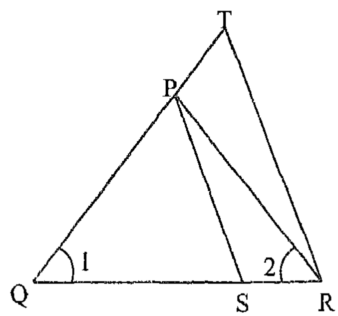
$\Delta ABC \sim \Delta DFE$ (SSS समरूपता)

$\therefore$ $\angle B = \angle F$ (संगत कोण)

परंतु $\angle B = 60°$ (दिया है)

$\therefore$ $\angle F = 60°$

उदाहरण 8 : आकृति 8.23 में, $\frac{QT}{PR}=\frac{QR}{QS}$ और $\angle 1 = \angle 2$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ है।



आकृति 8.23

हल : $\frac{QT}{PR}=\frac{QR}{QS}$ (दिया है)

$\therefore$ $\frac{QT}{QR}=\frac{PR}{QS}$ (1)

अब $\angle 1 = \angle 2$ (दिया है)

$\therefore$ PQ = PR (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ) (2)

$\therefore$ $\frac{QT}{QR}=\frac{PQ}{QS}$ [(1) और (2) से] (3)

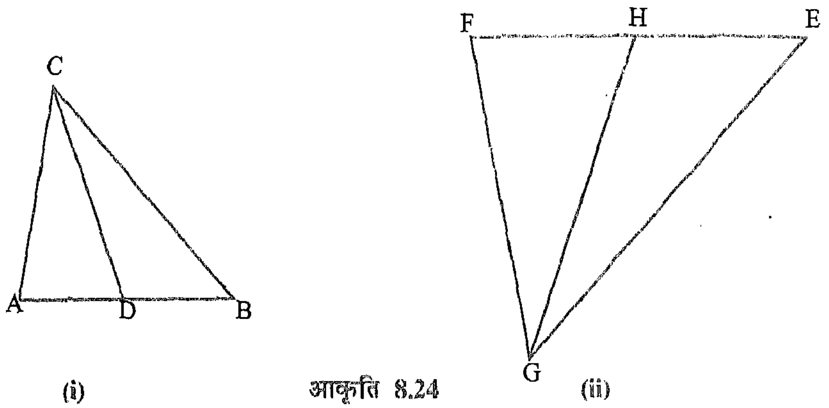
अब त्रिभुजों PQS और TQR में, हमें प्राप्त है :

$\frac{PQ}{QS}=\frac{QT}{QR}$ [(3) से]

तथा $\angle Q = \angle Q$ (= $\angle 1$, प्रत्येक में)

$\therefore$ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ (भुजा-कोण-भुजा समरूपता)

उदाहरण 9 : आकृति 8.24 में, CD और GH क्रमशः ΔABC और ΔEFG की माध्यिकाएँ हैं।



(i) आकृति 8.24 (ii)

यदि $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta ADC \sim \Delta FHG$

(ii) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AB}{FE}$

(iii) $\Delta CDB \sim \Delta GHE$

हल : (i) हमें दिया है कि

$$\Delta ABC \sim \Delta FEG \qquad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{FE} = \frac{AC}{FG} = \frac{BC}{EG} \text{ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)} \qquad (2)$$

और $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle E$ तथा $\angle C = \angle G$ (3)

अब $AB = 2AD$ और $FE = 2FH$ ($\because$ D और H, AB तथा FE के मध्य-बिंदु हैं)

$$\therefore \quad \frac{2AD}{2FH} = \frac{AC}{FG}$$

$$\text{या} \quad \frac{AD}{AC} = \frac{FH}{FG} \qquad (4)$$

$\therefore$ (3) और (4) से,

$\Delta ADC \sim \Delta FHG$ (भुजा-कोण-भुजा समरूपता)

(ii) चूंकि $\Delta ADC \sim \Delta FHG$, (ऊपर सिद्ध किया है)

इसलिए हमें मिलता है :

$$\frac{CD}{GH}=\frac{AD}{FH}$$ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)

या $$\frac{CD}{GH}=\frac{2AD}{2FH}=\frac{AB}{FE}$$

(iii) हमें प्राप्त है :

$$\frac{CB}{GE}=\frac{AB}{FE}$$ ($\Delta ABC \sim \Delta FEG$) (5)

या $$\frac{CB}{GE}=\frac{2BD}{2EH}$$ (D और H मध्य-बिंदु हैं)

या $$\frac{CB}{GE}=\frac{BD}{EH}$$ (6)

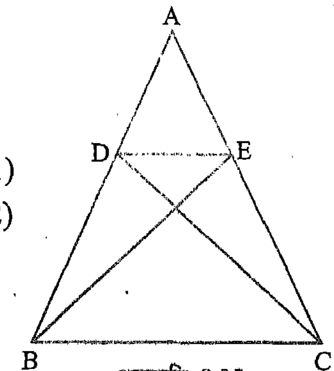
तथा $$\frac{CD}{GH}=\frac{AB}{FE}$$ [(ii) में सिद्ध किया है]

$\therefore$ $$\frac{CD}{GH}=\frac{CB}{GE}$$ [(5) से] (7)

$\therefore$ $$\frac{CD}{GH}=\frac{CB}{GE}=\frac{BD}{EH}$$ [(6) और (7) से]

अतः, $\Delta CDB \sim \Delta GHE$ (भुजा-भुजा-भुजा समरूपता)

उदाहरण 10 : आकृति 8.25 में, यदि $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



आकृति 8.25

हल : हमें दिया है कि

$$\Delta ABE \cong \Delta ACD$$

इसलिए, $AB = AC$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (1)

तथा $AE = AD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (2)

अर्थात् $$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$ [(1) और (2) से]

अर्थात् $$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$$ (3)

अब Δ ADE में, $\angle$A (अर्थात् $\angle$DAE) भुजाओं AD और AE के मध्य अंतर्विष्ट है और ΔABC में, $\angle$A (अर्थात् $\angle$BAC) भुजाओं AB और AC के मध्य अंतर्विष्ट है।

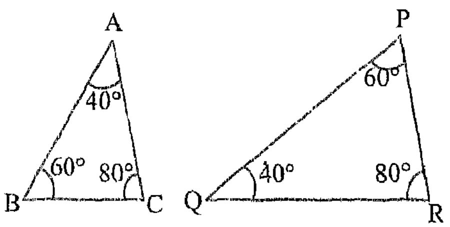
तथा $\angle DAE = \angle BAC$ (उभयनिष्ठ कोण)

साथ ही, $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$ [(3) से]

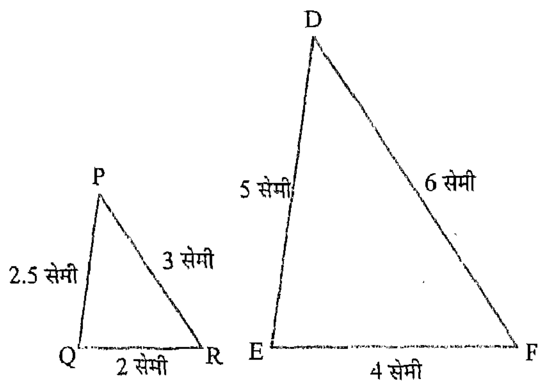
$\therefore$ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (भुजा-कोण-भुजा समरूपता)

प्रश्नावली 8.2

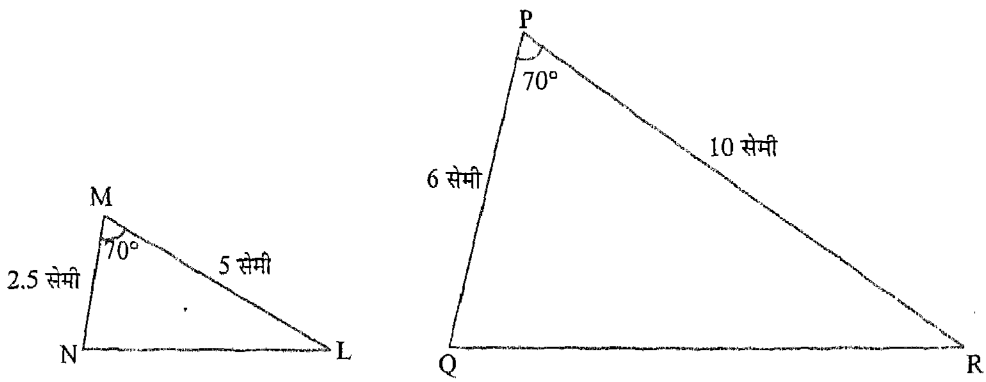
1. आकृति 8.26 में, त्रिभुजों के प्रत्येक युग्म की जाँच कीजिए और बताइए कि त्रिभुजों के कौन-से युग्म समरूप हैं। आप प्रश्नों के उत्तर देने के लिए प्रयुक्त समरूपता कसौटी को भी लिखिए तथा समरूपता संबंध को सांकेतिक रूप में लिखिए।



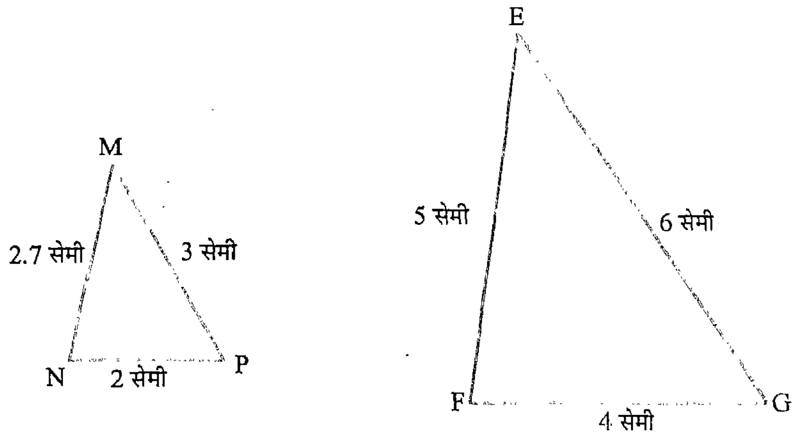
(i)



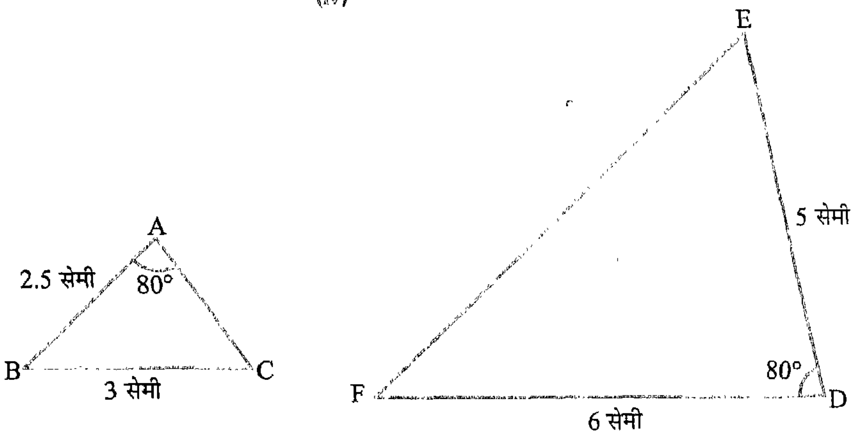
(ii)



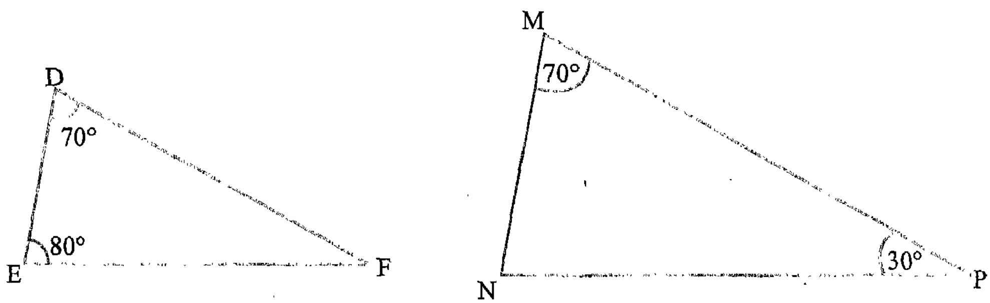
(iii)



(iv)



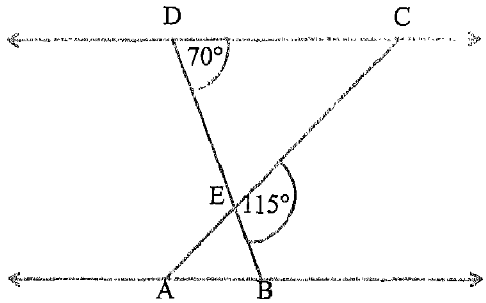
(v)



(vi)

आकृति 8.26

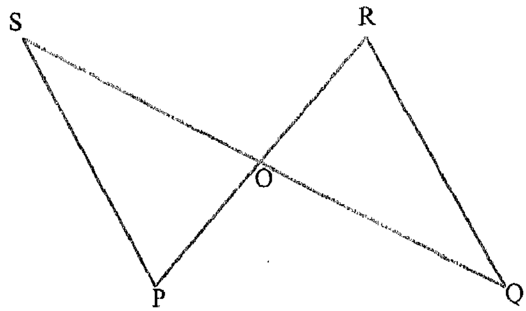
2. आकृति 8.27 में, $\Delta EDC \sim \Delta EBA$, $\angle BEC = 115°$ और $\angle EDC = 70°$ है। $\angle DEC$, $\angle DCE$, $\angle EAB$, $\angle AEB$ और $\angle EBA$ ज्ञात कीजिए ।



आकृति 8.27

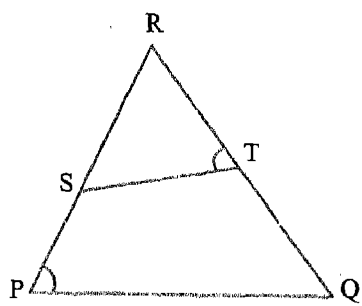
3. आकृति 8.28 में, यदि $PS \parallel QR$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta POS \sim \Delta ROQ$ है।

4. आकृति 8.28 में, यदि $\Delta POS \sim \Delta ROQ$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $PS \parallel QR$ है।



आकृति 8.28

5. आकृति 8.29 में, यदि $\angle P = \angle RTS$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।



आकृति 8.29

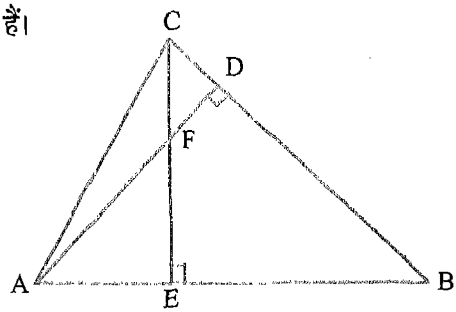
6. आकृति 8.30 में, AD और CE, ΔABC के शीर्षलंब हैं। सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta AEF \sim \Delta CDF$

(ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

(iii) $\Delta AEF \sim \Delta ADB$

(iv) $\Delta FDC \sim \Delta BEC$



आकृति 8.30

7. यदि CD और GH (D और H, AB और FE पर स्थित हैं) क्रमश: $\angle ACB$ और $\angle EGF$ के समद्विभाजक हों तथा $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

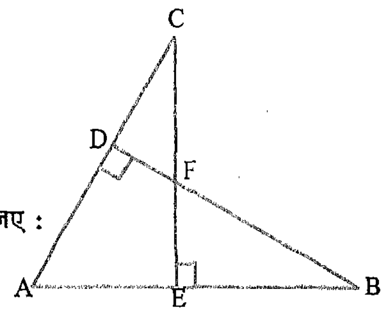
(ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

(iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

8. आकृति 8.31 में, $BD \perp AC$ और $CE \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta AEC \sim \Delta ADB$

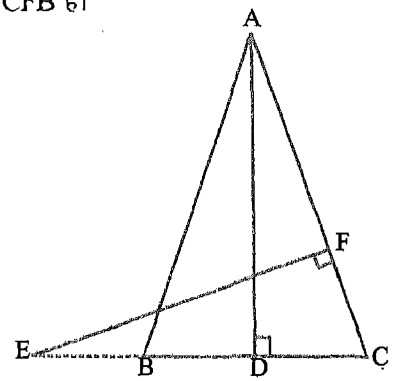
(ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$



आकृति 8.31

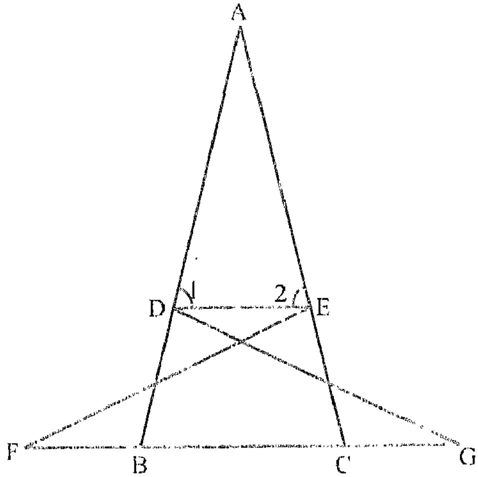
9. समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा AD के बढ़े हुए भाग पर E एक बिंदु है और BE, CD को F पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ है।

10. आकृति 8.32 में, एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है। इसकी बढ़ाई गई भुजा CB पर E कोई बिंदु है। यदि $AD \perp BC$ और $EF \perp AC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ है।



आकृति 8.32

11. आकृति 8.33 में, $\Delta FEC \cong \Delta GBD$ तथा $\angle 1 = \angle 2$ है। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ है।



आकृति 8.33

12. दो समरूप त्रिभुजों के परिमाप क्रमश: 30 सेमी और 20 सेमी हैं। यदि पहले त्रिभुज की एक भुजा 12 सेमी हो, तो दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा ज्ञात कीजिए।
[**संकेत :** समरूप त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात वही होता है जो उनकी भुजाओं का होता है।]

13. यदि एक त्रिभुज के कोण दूसरे त्रिभुज के कोणों के बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनकी संगत भुजाओं का वही अनुपात होगा जो कि उनकी (उनके) संगत

(i) माध्यिकाओं

(ii) कोण समद्विभाजकों

(iii) शीर्षलंबों

का अनुपात है।

14. एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और इनमें से एक भुजा को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका, दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और संगत माध्यिका के आनुपातिक हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समरूप हैं।

15. किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर D एक बिंदु इस प्रकार है कि $\angle ADC = \angle BAC$ है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CA}$ होगा।

16. किसी त्रिभुज ABC की भुजा AB और AC तथा माध्यिका AD, दूसरे त्रिभुज PQR की भुजाओं PQ और PR तथा माध्यिका PM के आनुपातिक हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

[**संकेत :** AD को E तक तथा PM को N तक इस प्रकार बढ़ाइए कि AD = DE और PM = MN हो।]

17. 12 सेमी लंबी एक ऊर्ध्वाधर छड़ी की मैदान में 8 सेमी लंबी छाया बनती है। उसी समय, एक मीनार की मैदान में 40 मी लंबी छाया बनती है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

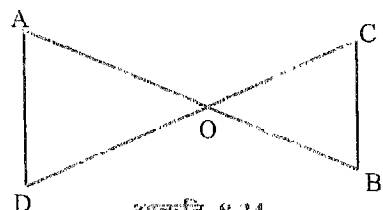
18. ABCD एक समलंब है जिसमें AB || CD है। उसके विकर्ण AC और BD, O पर मिलते हैं। समरूपता कसौटी का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

19. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है तथा AC पर D एक ऐसा बिंदु है जिसके लिए $BC^2 = AC \times CD$ है। सिद्ध कीजिए कि BD = BC है।

20. समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्ष D से होकर एक रेखा खींची जाती है जो भुजा AB और CB के बढ़े भाग को क्रमशः E और F पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{DA}{AE} = \frac{FB}{BE} = \frac{FC}{CD}$ है।

21. समांतर चतुर्भुज ABCD का विकर्ण BD, रेखाखंड AE को बिंदु F पर प्रतिच्छेदित करता है, जहाँ E भुजा BC पर कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $DF \times EF = FB \times FA$ है।

22. आकृति 8.34 में, $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ है।
सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।



आकृति 8.34

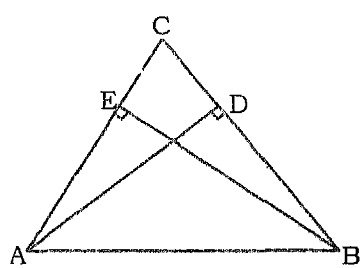
23. आकृति 8.35 में, AD और BE क्रमशः BC और AC पर लंब हैं। दर्शाइए :

(i) $\Delta ADC \sim \Delta BEC$

(ii) $CA \times CE = CB \times CD$

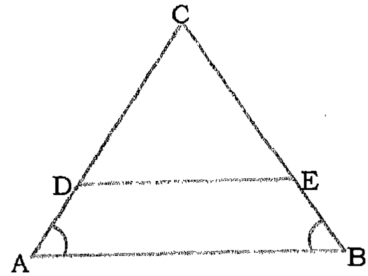
(iii) $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

(iv) $CD \times AB = CA \times DE$



आकृति 8.35

24. आकृति 8.36 में, $\angle A = \angle B$ और $AD = BE$ है। सिद्ध कीजिए कि $DE \parallel AB$ है।



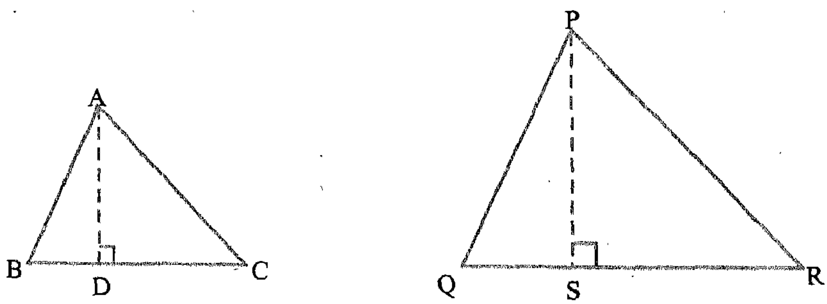
आकृति 8.36

8.5 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल

अभी तक हमने पढ़ा है कि दो समरूप त्रिभुजों में, उसकी संगत भुजाएँ समान अनुपात (आनुपातिक) में होती हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न उठता है : हम दो त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के अनुपात के संबंध में क्या कह सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर पाने के लिए, हम निम्न परिणाम को सिद्ध करते हैं :

प्रमेय 8.2 : *दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।*

दिया है : ΔABC और ΔPQR इस प्रकार हैं कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$।



आकृति 8.37

सिद्ध करना है : $\dfrac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{CA^2}{RP^2}$

रचना : हम $AD \perp BC$ और $PS \perp QR$ खींचते हैं (आकृति 8.37)।

उपपत्ति : $$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2}\times BC\times AD}{\frac{1}{2}\times QR\times PS}$$ [त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई]

या $$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR}\times\frac{AD}{PS} \quad (1)$$

अब, त्रिभुजों ADB और PSQ में,

$\angle B = \angle Q$ [क्योंकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$]

$\angle ADB = \angle PSQ$ [प्रत्येक 90° हैं]

इसलिए, $\Delta ADB \sim \Delta PSQ$ (कोण-कोण समरूपता)

अत:, $$\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ} \quad (2)$$

परंतु $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$ (चूंकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$)

$\therefore$ $$\frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \quad (3)$$ [(2) से]

अत:, $$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR}\times\frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} \quad (4)$$ [(1) और (3) से]

चूंकि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, इसलिए

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \quad (5)$$

अत:, $$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{CA^2}{RP^2}$$ [(4) और (5) से]

8.6 समकोण त्रिभुज के एक शीर्षलंब से बने त्रिभुजों की समरूपता

आइए एक समकोण त्रिभुज ABC को लें जिसका $\angle B$ समकोण है (आकृति 8.38)। आइए, शीर्षलंब BD खींचें तथा इस शीर्षलंब के दोनों ओर के त्रिभुजों ABD और CBD की जाँच करें।

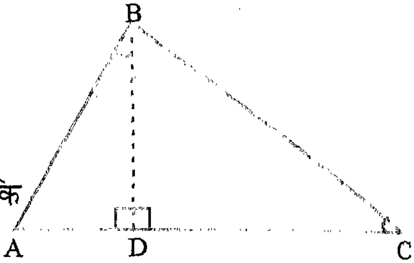
हम देखते हैं कि

$\angle A + \angle ABD = 90°$ (Δ ABD में) (1)

और $\angle C + \angle CBD = 90°$ (Δ CBD में) (2)

साथ ही, $\angle ABD + \angle CBD = 90°$ (3)

(1), (2) और (3) से, हम सुगमता से देख सकते हैं कि



आकृति 8.38

$\angle A = \angle CBD$

और $\angle C = \angle ABD$

क्या आप देख सकते हैं कि

(ΔABD का) $\angle A$ = (ΔCBD का) $\angle CBD$

और (ΔABD का) $\angle ADB$ = (ΔCBD का) $\angle CDB$

उपर्युक्त को दृष्टिगत करने से,

$\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (कोण-कोण समरूपता) (4)

इस प्रकार, लंब BD के दोनों ओर के त्रिभुज परस्पर समरूप हैं। क्या आप यह भी देख सकते हैं कि त्रिभुजों ABD और ABC में,

$\angle A = \angle A$ (समान कोण)

तथा $\angle ADB = \angle ABC$ (प्रत्येक 90° का)

अर्थात् $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (कोण-कोण समरूपता) (5)

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (6)

ऊपर (4), (5) तथा (6) के आधार पर, हम निम्न परिणाम प्राप्त कर सकते हैं :

प्रमेय 8.5 : *यदि समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर लंब डालें, तो लंब के दोनों ओर बने त्रिभुज मूल त्रिभुज के तथा परस्पर समरूप होते हैं।*

आइए अब हम इन परिणामों का प्रयोग कुछ उदाहरणों द्वारा प्रदर्शित करें।

उदाहरण 11 : सिद्ध कीजिए कि वर्ग की एक भुजा पर निर्मित समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, उसके विकर्ण पर बने समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

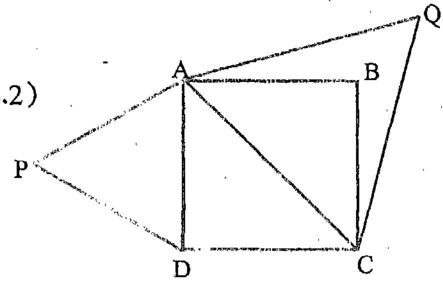
हल : मान लीजिए ABCD एक वर्ग है और PAD तथा QAC भुजा AD तथा विकर्ण AC पर क्रमशः बने दो समबाहु त्रिभुज हैं (आकृति 8.39)।

मान लीजिए वर्ग की भुजा a है।

$\therefore \quad AC=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$ (1)

अब, हमें प्राप्त होता है :

$\Delta PAD \sim \Delta QAC$ (क्योंकि सभी समबाहु त्रिभुजों में प्रत्येक कोण $60°$ का होता है। अतः वे सभी समरूप हैं।)



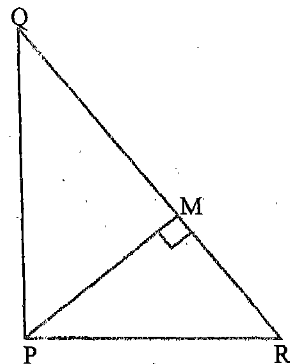
आकृति 8.39

$\therefore \quad \dfrac{ar(\Delta PAD)}{ar(\Delta QAC)}=\dfrac{AD^2}{AC^2}$ (प्रमेय 8.2)

$=\dfrac{a^2}{(\sqrt{2}a)^2}=\dfrac{1}{2}$ [(1) से]

इसलिए, $ar(\Delta PAD)=\frac{1}{2}\ ar(\Delta QAC)$।

उदाहरण 12 : PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका $\angle P$ समकोण है तथा $PM \perp QR$ है (आकृति 8.40)।
सिद्ध कीजिए कि $PM^2 = QM \times MR$ है।



आकृति 8.40

हल : चूंकि $PM \perp QR$, इसलिए

$\Delta PRM \sim \Delta QPM$ (गुणधर्म 8.5)

$\therefore \quad \dfrac{PM}{MR}=\dfrac{QM}{PM}$ (समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ आनुपातिक होती हैं)

अर्थात्, $PM \times PM = QM \times MR$

या $PM^2 = QM \times MR$

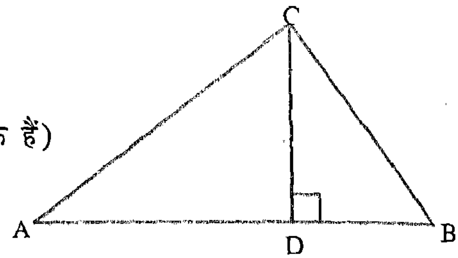
उदाहरण 13 : आकृति 8.41 में, $\angle ACB = 90°$ और $CD \perp AB$ है। सिद्ध कीजिए :

$$\frac{CB^2}{CA^2}=\frac{BD}{AD}$$

हल : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ (गुणधर्म 8.5)

$\therefore \quad \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)

या $AC^2 = AB \times AD$ (1)



आकृति 8.41

इसी प्रकार, $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ (गुणधर्म 8.5)

$\therefore$ $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)

या $BC^2 = BD \times BA$ (2)

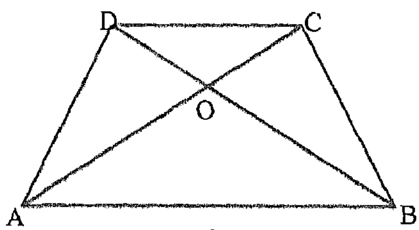
$\therefore$ $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD \times BA}{AB \times AD}$ [(1) और (2) से]

अर्थात् $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$

प्रश्नावली 8.3

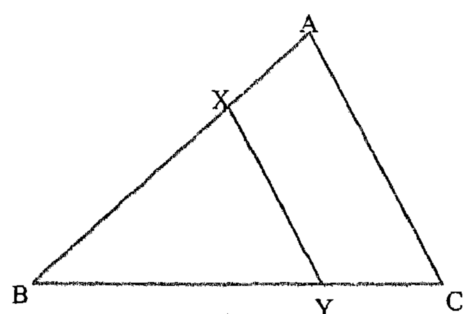
1. दो समरूप त्रिभुजों ABC और PQR के क्षेत्रफल क्रमशः 64 सेमी^{2} तथा 121 सेमी^{2} हैं। यदि QR = 15.4 सेमी हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

2. आकृति 8.42 में, ABCD एक समलंब है जिसमें AB || CD और AB = 2 CD है। त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



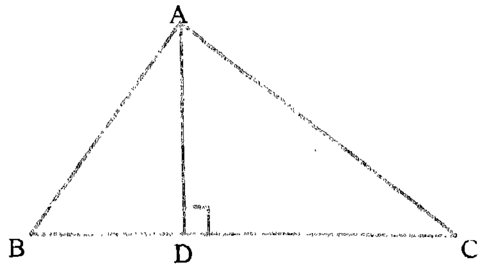
आकृति 8.42

3. आकृति 8.43 में, XY || AC और XY त्रिभुजीय क्षेत्र ABC को दो बराबर क्षेत्रफल वाले भागों में विभाजित करता है। $\frac{AX}{AB}$ ज्ञात कीजिए।



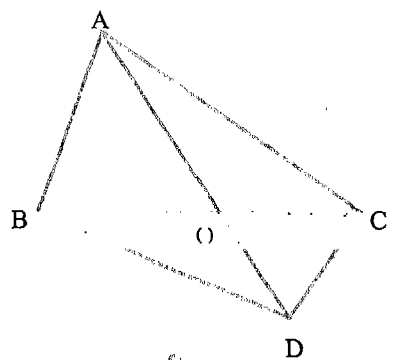
आकृति 8.43

4. आकृति 8.44 में, AD ⊥ BC है। यदि $\frac{BD}{DA} = \frac{DA}{DC}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।



आकृति 8.44

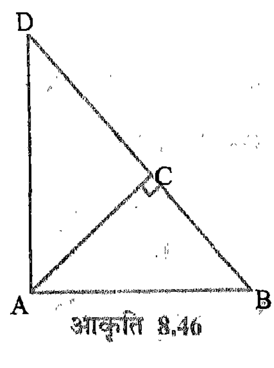
5. आकृति 8.45 में, ABC और DBC समान आधार BC पर दो त्रिभुज हैं। सिद्ध कीजिए कि $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है।



आकृति 8.45

6. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात वही होता है जो कि उनकी संगत माध्यिकाओं के वर्गों का अनुपात होता है।

7. ABD एक त्रिभुज है जिसमें ∠DAB = 90° और AC ⊥ BD है (आकृति 8.46)।
सिद्ध कीजिए :
(i) $AB^2 = BC \times BD$
(ii) $AC^2 = BC \times DC$
(iii) $AD^2 = BD \times CD$



आकृति 8.46

8. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वे सर्वांगसम हैं।

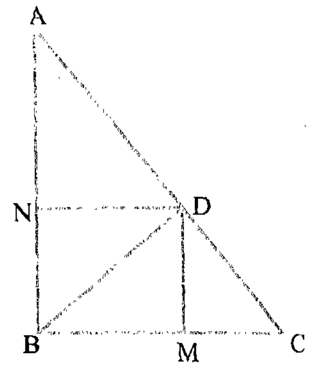
9. Δ ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य-बिंदु क्रमश: D, E और F हैं। त्रिभुजों DEF और ABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC = 90°$, $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ और $DN \perp AB$ है (आकृति 8.47)।

सिद्ध कीजिए :

(i) $DM^2 = DN \times MC$

(ii) $DN^2 = DM \times AN$



आकृति 8.47

8.7 पाइथागोरस प्रमेय

अब हम एक महत्त्वपूर्ण प्रमेय को, जिसे *पाइथागोरस प्रमेय* के नाम से जानते हैं (यह *बौधायन प्रमेय* के नाम से भी विख्यात है), गुणधर्म 8.5 के प्रयोग से सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 8.3 : ***समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।***

दिया है : एक समकोण त्रिभुज ABC जिसका $\angle B$ समकोण है (आकृति 8.48)।

सिद्ध करना है : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना : हम $BD \perp AC$ खींचते हैं।

उपपत्ति : $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (गुणधर्म 8.5)

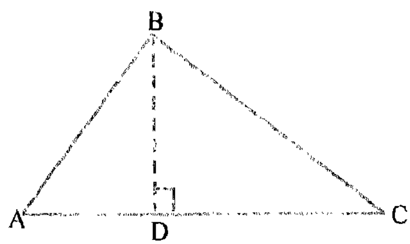
$\therefore \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)

या $\quad AB^2 = AD \times AC \quad (1)$

साथ ही, $\Delta CDB \sim \Delta CBA$ (गुणधर्म 8.5)

$\therefore \quad \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{CA}$ (भुजाएँ आनुपातिक हैं)

या $\quad BC^2 = CD \times CA \quad (2)$



आकृति 8.48

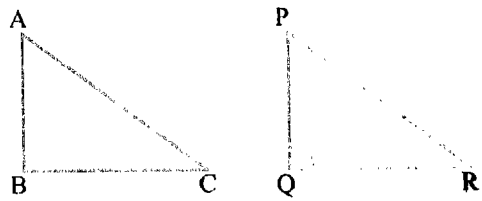
(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + CD \times AC$$
$$= AC\,(AD + CD)$$
$$= AC \times AC$$
$$= AC^2$$

अब हम इस प्रमेय का विलोम सिद्ध करेंगे :

प्रमेय 8.4 : *किसी त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं* ***के वर्गों के योग के बराबर*** *हो, तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है।*

दिया है : एक त्रिभुज ABC इस प्रकार का है, जिसमें $AB^2 + BC^2 = AC^2$ **है (आकृति 8.49)।**



आकृति 8.49

सिद्ध करना है : $\angle B = 90°$

रचना : आइए एक ΔPQR की रचना करें जिसका $\angle Q$ समकोण हो तथा **PQ = AB और** QR = BC हो।

उपपत्ति : ΔPQR में,

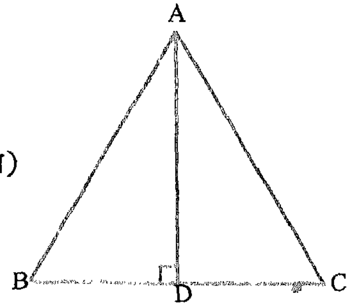
	$PR^2 = PQ^2 + QR^2$	(पाइथागोरस प्रमेय से)	
या	$PR^2 = AB^2 + BC^2$	(चूंकि PQ = AB और QR = BC)	**(1)**
परंतु	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	(दिया है)	**(2)**
$\therefore$	$PR^2 = AC^2$	[(1) और (2) से]	
अर्थात्	$PR = AC$		
या	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	(भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता)	
$\therefore$	$\angle B = \angle Q = 90°$	(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)	
अतः,	$\angle B = 90°$		

अब हम इन प्रमेयों का प्रयोग उदाहरणों द्वारा प्रदर्शित करते हैं :

उदाहरण 14 : ABC एक समबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजा $2a$ है। सिद्ध कीजिए कि शीर्षलंब $AD = a\sqrt{3}$ है (आकृति 8.50)।

हल : Δ ABD और Δ ACD में,

	$AB = AC$	(दिया है)
	$AD = AD$	
और	$\angle ADB = \angle ADC$	(प्रत्येक 90°)
$\therefore$	$\Delta ABD \cong \Delta ACD$	(समकोण-कर्ण-भुजा)
अतः,	$BD = CD$	
या	$BD = CD = \frac{1}{2} \times 2a = a$	



आकृति 8.50

अब ΔABD से,

	$AB^2 = BD^2 + AD^2$	(पाइथागोरस प्रमेय)
या	$(2a)^2 = a^2 + AD^2$	
या	$AD^2 - 4a^2 - a^2 = 3a^2$	
या	$AD = \sqrt{3}a$	

उदाहरण 15 : त्रिभुज ABC में, $\angle A = 90°$ है। यदि $AD \perp BC$ (आकृति 8.51) हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

हल : ΔADC से,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय) (1)

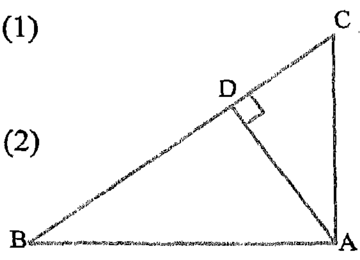
और ΔADB से,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ (पाइथागोरस प्रमेय) (2)

(2) में से (1) को घटाने पर, हमें मिलता है :

$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

या $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



आकृति 8.51

उदाहरण 16 : आकृति 8.52 में, $\angle ABC > 90°$ और $AD \perp CB$ (बढ़े भाग पर) है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है।

हल : समकोण Δ ADC से,

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)}$$

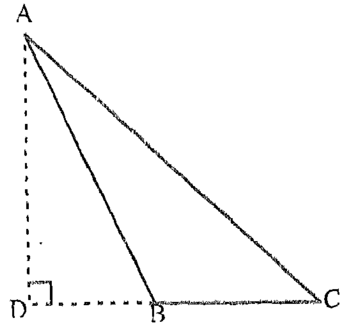
या $AC^2 = AD^2 + (BC + BD)^2$

या $AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 + 2BC.BD$

या $AC^2 = (AD^2 + BD^2) + BC^2 + 2BC.BD$

या $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

क्योंकि $AD^2 + BD^2 = AB^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)



आकृति 8.52

उदाहरण 17 : सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग, उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : एक समचतुर्भुज ABCD लीजिए, जिसके विकर्ण AC और BD, O पर प्रतिच्छेद करते हों (आकृति 8.53)।

हमें सिद्ध करना है कि $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

यहाँ, $AC \perp BD$, OA = OC और OB = OD है।

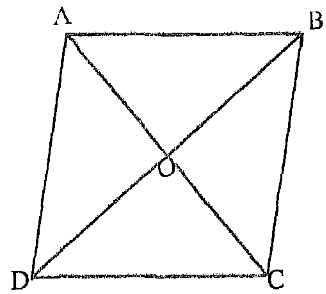
(समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं)

$\therefore$ Δ AOB से,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

या $AB^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2$

या $AB^2 = \frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4}$



आकृति 8.53

या $4AB^2 = AC^2 + BD^2$ (1)

परंतु $4AB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ (ABCD एक समचतुर्भुज है) (2)

$\therefore$ हमें प्राप्त होता है :

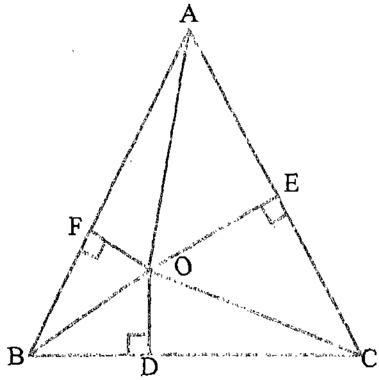
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 \quad \text{[(1) और (2) से]}$$

उदाहरण 18 : आकृति 8.54 में, एक त्रिभुज के अंत:बिंदु O से, OD, OE और OF क्रमश:

भुजाओं BC, CA और AB पर लंब हैं। सिद्ध कीजिए :

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2$
$= AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



आकृति 8.54

हल : (i) OA, OB और OC को मिलाइए।

तब ΔOAF, ΔOBD और ΔOCE लेकर तथा पाइथागोरस प्रमेय लगाने पर,

$$OA^2 - OF^2 = AF^2$$

$$OB^2 - OD^2 = BD^2$$

और $$OC^2 - OE^2 = CE^2$$

उपर्युक्त तीनों को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad (1)$$

(ii) इसी प्रकार, ऊपर की तरह ΔOBF, ΔODC और ΔOAE लेकर हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2 \quad (2)$$

$\therefore$ $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ [(1) और (2) से]

प्रश्नावली 8.4

1. कुछ त्रिभुजों की भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि उनमें से कौन-कौन से समकोण त्रिभुज हैं।
   (i) 7 सेमी, 24 सेमी, 25 सेमी
   (ii) 3 सेमी, 8 सेमी, 6 सेमी
   (iii) 50 सेमी, 80 सेमी, 100 सेमी

2. एक सीढ़ी इस प्रकार रखी है कि उसका निचला सिरा किसी दीवार से 5 मी दूर है और उसका ऊपरी सिरा एक खिड़की तक पहुँचता है, जो भूमि से 12 मी ऊँचाई पर है। सीढ़ी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. 20 मी लंबी एक सीढ़ी एक भवन की खिड़की तक पहुँचती है, जो भूमि से 16 मी की ऊँचाई पर है। भवन से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

4. एक व्यक्ति पूरब की ओर 10 मी और फिर उत्तर की ओर 30 मी जाता है। प्रारंभिक बिंदु से उसकी दूरी ज्ञात कीजिए।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

6. 6 मी और 11 मी लंबे दो खंभे समतल मैदान में गड़े हैं। यदि उनके निचले सिरों की दूरी 12 मी हो, तो उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

7. एक ΔABC में, $\angle C$ समकोण है। बिंदु P और Q क्रमशः उसकी भुजाओं CA और CB पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AQ^2 + BP^2 = AB^2 + PQ^2$ है।

8. एक ΔABC, जिसका कोण A समकोण है, की BL और CM दो माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि

$$4\,(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$$

है।

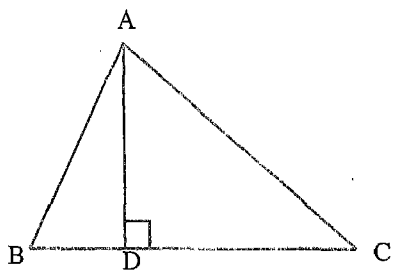
9. एक समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तीन गुना उसके शीर्षलंब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

10. आयत ABCD के अभ्यंतर में कोई बिंदु O है। सिद्ध कीजिए कि

$$OB^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2$$

है।

11. आकृति 8.55 में, $\angle B < 90°$ और $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ है।



आकृति 8.55

12. आकृति 8.56 में, ΔABC की AD एक माध्यिका है और $AE \perp BC$ है। यदि $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AD = p$, $AE = h$ और $DE = x$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

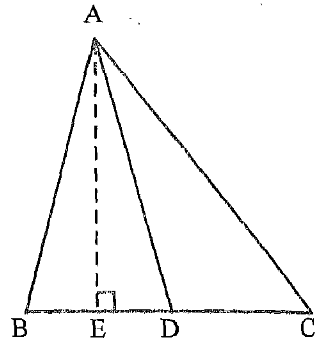
(i) $b^2 = p^2 + ax + \dfrac{a^2}{4}$

(ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$

(iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{1}{2}a^2$

[**टिप्पणी :** परिणाम (iii) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$AB^2 + AC^2 = 2\ (\text{माध्यिका } AD)^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2$]



आकृति 8.56

13. A से ΔABC की भुजा BC पर लंब BC को D पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित करता है कि $DB = 3CD$ है। सिद्ध कीजिए कि $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।

14. एक समबाहु त्रिभुज ABC में, BC पर बिंदु D इस प्रकार है कि $BD = \frac{1}{3}BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।
[**संकेत :** $AP \perp AB$ खींचिए]

15. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

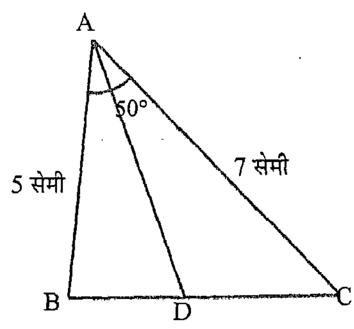
16. ΔPQR में, $QM \perp PR$ और $PR^2 - PQ^2 = QR^2$ है। सिद्ध कीजिए कि $QM^2 = PM \times MR$ है।

17. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग, उसकी भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

8.8 त्रिभुज के किसी कोण का आंतरिक समद्विभाजक

आइए, एक त्रिभुज ABC बनाएँ जिसकी दो भुजाएँ AB और AC, 5 सेमी और 7 सेमी हों तथा उनके अंतर्गत कोण $\angle BAC = 50°$ हो, (आकृति 8.57)।

आइए अब $\angle BAC$ का समद्विभाजक खींचें जो BC से D पर मिलता है। हम BD और CD को मापते हैं और $\frac{BD}{CD}$ ज्ञात करते हैं।



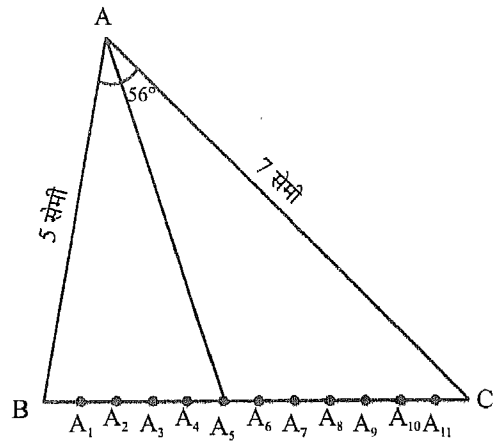
आकृति 8.57

हम पाएँगे कि $\frac{BD}{CD} = \frac{5}{7} = \frac{AB}{AC}$ है। दूसरे शब्दों में, कोण का समद्विभाजक सम्मुख भुजा को उस कोण को बनाने वाली भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है। हम इस क्रियाकलाप को इस प्रकार के कई त्रिभुजों को बनाकर और उसके किसी कोण का समद्विभाजक खींचकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हमें एक ही निष्कर्ष प्राप्त होगा। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

गुणधर्म 8.6 : *एक त्रिभुज के किसी कोण का आंतरिक समद्विभाजक सम्मुख भुजा को, उस कोण को बनाने वाली भुजाओं के अनुपात में विभाजित करता है।*

टिप्पणी : इस गुणधर्म को हम C से DA के समांतर एक रेखा खींचकर जो BA को बढ़ाने पर E पर मिलती हो, सिद्ध कर सकते हैं। इसके लिए हमें आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का प्रयोग करना होगा।

आइए इस कथन के विलोम पर विचार करें। इसके लिए, आइए एक त्रिभुज ABC की रचना करें जिसमें AB = 5 सेमी, AC = 7 सेमी और $\angle A = 56°$ मान लीजिए (आकृति 8.58)।



आकृति 8.58

आइए BC को 5 + 7 = 12 बराबर भागों BA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{11}C$ में विभाजित करें। हम A_5 और A को मिलाते हैं। कोण $\angle BAA_5$ और $\angle CAA_5$ को मापिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि $\angle BAA_5 = \angle CAA_5$ है, अर्थात् AA_5, $\angle A$ का समद्विभाजक है। हम इस क्रियाकलाप की, इस प्रकार के अनेक त्रिभुजों ABC को बनाकर और BC को समुचित बराबर भागों में विभाजित कर, पुनरावृत्ति कर सकते हैं। प्रत्येक बार हमको एक ही निष्कर्ष मिलेगा। इस प्रकार, हम देखते हैं कि

गुणधर्म 8.7 : *यदि एक त्रिभुज के किसी कोण के शीर्ष से खींचा गया रेखाखंड सम्मुख भुजा को उस कोण को बनाने वाली भुजाओं के अनुपात में विभाजित करे, तो वह रेखाखंड उस कोण को समद्विभाजित करता है।*

टिप्पणी : इस गुणधर्म को, C से होकर जाती हुई AA_5 के समांतर एक रेखा खींचकर जो

BA के बढ़े हुए भाग को E पर मिलती हो, सिद्ध कर सकते हैं। इसके लिए भी हमें आधारभूत आनुपातिकता प्रमेय का प्रयोग करना होगा।

अब हम इन गुणधर्मों का प्रयोग कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 19 : एक चतुर्भुज ABCD का विकर्ण BQ, ∠B और ∠D को समद्विभाजित करता है (आकृति 8.59)। सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DA}{CD} \text{ है।}$$

हल : आइए हम AC को मिलाएँ, जो BD को O पर प्रतिच्छेदित करता है।

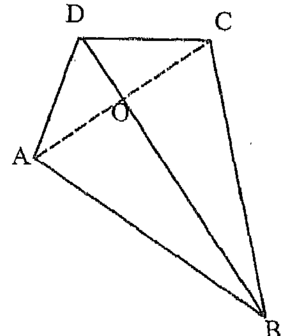
अब, ΔABC से,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AO}{OC} \qquad \text{(गुणधर्म 8.6)} \qquad (1)$$

साथ ही, ΔADC से,

$$\frac{AD}{DC}=\frac{AO}{OC} \qquad \text{(गुणधर्म 8.6)} \qquad (2)$$

इसलिए, $$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC} \qquad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}]$$

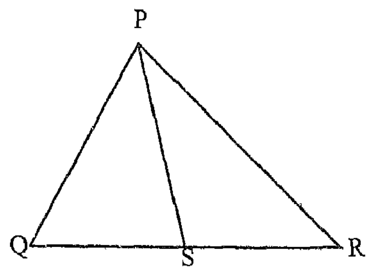


आकृति 8.59

उदाहरण 20 : निम्न में बताइए कि क्या आकृति 8.60 में दिए हुए ΔPQR के ∠P का PS समद्विभाजक है :

(i) PQ = 6 सेमी, PR = 8 सेमी।
QS = 1.5 सेमी और RS = 2 सेमी।

(ii) PQ = 5 सेमी, PR = 12 सेमी,
QS = 2.5 सेमी और QR = 9 सेमी।



आकृति 8.60

हल : (i) $$\frac{PQ}{PR}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

और $$\frac{QS}{RS}=\frac{1.5}{2}=\frac{3}{4}$$

इस प्रकार, $$\frac{PQ}{PR}=\frac{QS}{RS}$$

अतः, ∠P का PS समद्विभाजक है (गुणधर्म 8.7)।

(ii) $\frac{PQ}{PR} = \frac{5}{12}$

यहाँ, QS = 2.5 सेमी और RS = QR – QS

= (9 – 2.5) सेमी

= 6.5 सेमी

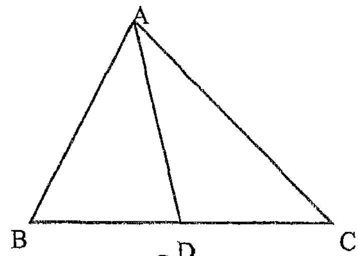
$\therefore$ $\frac{QS}{RS} = \frac{2.5}{6.5} = \frac{5}{13}$.

चूंकि $\frac{PQ}{PR} \neq \frac{QS}{RS}$ है,

इसलिए PS, $\angle P$ का समद्विभाजक नहीं है।

प्रश्नावली 8.5

1. जाँच कीजिए कि क्या आकृति 8.61 में दिए हुए ΔABC के लिए $\angle A$ का AD निम्न स्थिति में समद्विभाजक है :
   (i) AB = 5 सेमी, AC = 10 सेमी, BD = 1.5 सेमी और CD = 3.5 सेमी।
   (ii) AB = 4 सेमी, AC = 6सेमी, BD = 1.6 सेमी और CD = 2.4 सेमी।
   (iii) AB = 8 सेमी, AC = 24 सेमी, BD = 6 सेमी और BC = 24 सेमी।



आकृति 8.61

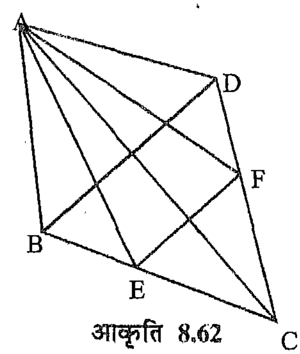
2. यदि आकृति 8.61 में AD, $\angle A$ को समद्विभाजित करता है तथा AB = 12 सेमी, AC = 20 सेमी और BD = 5 सेमी हो, तो CD निर्धारित कीजिए।

3. यदि किसी त्रिभुज में एक कोण का समद्विभाजक सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु है।

4. ΔABC के अभ्यंतर में O एक बिंदु है। $\angle AOB$, $\angle BOC$ और $\angle COA$ के समद्विभाजक भुजाओं AB, BC और CA से क्रमश: बिंदुओं D, E और F पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए :

   AD . BE . CF = DB . EC . FA

5. आकृति 8.62 में, ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें AB = AD है। AE और AF क्रमश: $\angle BAC$ और $\angle DAC$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि EF || BD है।



आकृति 8.62

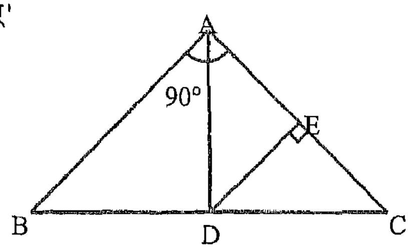
6. ΔABC में, $\angle B = 2\angle C$ और $\angle B$ का समद्विभाजक AC को D पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{BD}{DA} = \frac{BC}{BA}$ है।

7. ΔABC में, $\angle B$ का समद्विभाजक भुजा AC को D पर प्रतिच्छेदित करता है। AC के समांतर एक रेखा, रेखाखंडों AB, DB और CB को क्रमशः P, R और Q पर प्रतिच्छेदित करती है। सिद्ध कीजिए :
   (i) $AB \times CQ = BC \times AP$
   (ii) $PR \times BQ = QR \times BP$

8. ΔABC की भुजा BC का D मध्य-बिंदु है। DE और DF क्रमशः $\angle BDA$ और $\angle CDA$ के ऐसे समद्विभाजक हैं कि E और F क्रमशः AB और AC पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $EF \parallel BC$ है।

9. ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB पर क्रमशः बिंदु D, E और F इस प्रकार हैं कि AD, $\angle A$ को; BE, $\angle B$ को और CF, $\angle C$ को समद्विभाजित करता है। यदि AB = 5 सेमी, BC = 8 सेमी और CA = 4 सेमी हो, तो AF, CE और BD ज्ञात कीजिए'

10. आकृति 8.63 में, $\angle BAC = 90°$ है तथा AD उसका समद्विभाजक है। यदि $DE \perp AC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $DE \times (AB + AC) = AB \times AC$ है।



आकृति 8.63

11. ΔABC में, BO और CO क्रमशः $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। AO का बढ़ा हुआ भाग BC से P पर मिलता है। दर्शाइए कि
   (i) $\frac{AB}{BP} = \frac{AO}{OP}$ ।
   (ii) $\frac{AC}{CP} = \frac{AO}{OP}$ ।
   (iii) $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{PC}$ ।
   (iv) AP, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

अध्याय 9

वृत्त

9.1 भूमिका

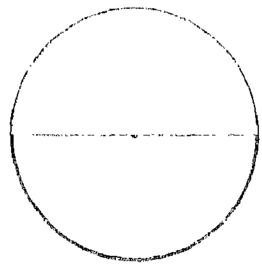
दैनिक उपयोग की बहुत-सी ऐसी वस्तुओं से हमारा संबंध पड़ता है, जो गोल (वृत्ताकार) बनावट की होती हैं। उदाहरणत: विभिन्न मूल्यों के सिक्के, चक्रिका (disc), पहिया, चूड़ी, घड़ी और अन्य आधुनिक उपकरण। हम पिछली कक्षाओं में वृत्तों के तथा उससे संबंधित कुछ शब्दों जैसे जीवा, चाप इत्यादि के बारे में पढ़ चुके हैं। हम वृत्तों से संबंधित कुछ गुणों के बारे में भी बिना सिद्ध किए पढ़ चुके हैं। हम प्रस्तुत अध्याय में, पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके वृत्त के गुणों (गुणधर्मों) का पुनरावलोकन करेंगे तथा इनमें से कुछ गुणधर्मों की उपपत्ति भी देंगे।

9.2 वृत्त और उसके भाग

स्मरण कीजिए कि वृत्त तल में एक बंद (या संवृत) आकृति है, जो उस तल पर स्थित ऐसे सभी बिंदुओं से बनी है, जिनकी तल पर स्थित एक निश्चित बिंदु से समान दूरी है। निश्चित बिंदु को *केंद्र* (*centre*) और अचर दूरी को वृत्त की *त्रिज्या* (*radius*) कहते हैं। आप पूर्व कक्षाओं में पढ़ चुके निम्न तथ्यों को भी स्मरण कीजिए।

वृत्त के किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड को वृत्त की *जीवा* (*chord*) कहते हैं। केंद्र से होकर जाने वाली किसी भी *जीवा* को *व्यास* (*diameter*) कहते हैं। व्यास, वृत्त की सबसे लंबी *जीवा* होती है। व्यास और त्रिज्या को हम उनकी लंबाइयों के अर्थ में भी प्रयोग करते हैं। इस अर्थ में, व्यास $= 2 \times$ त्रिज्या। वृत्त पर स्थित कोई भी दो बिंदु वृत्त को दो भागों में विभाजित करते हैं, जिन्हें वृत्त के *चाप* (*arcs*) कहते हैं। यदि दोनों भाग असमान हों, तो छोटे भाग को *लघु चाप* (*minor arc*) और बड़े भाग को *दीर्घ चाप* (*major arc*) कहते हैं। इनमें से प्रत्येक को चाप AB (या $\widehat{AB}$) कहते हैं। कभी-कभी एक चाप को दूसरे चाप से भिन्न दिखाने के लिए किसी एक चाप पर तीसरा बिंदु ले लेते हैं। फिर भी, इस पुस्तक में, जब तक कथित न हो, चाप AB का अर्थ हम लघु चाप AB लेंगे। यदि दोनों भाग बराबर हों, तब प्रत्येक भाग *अर्धवृत्त* (*semicircle*) कहलाता है।

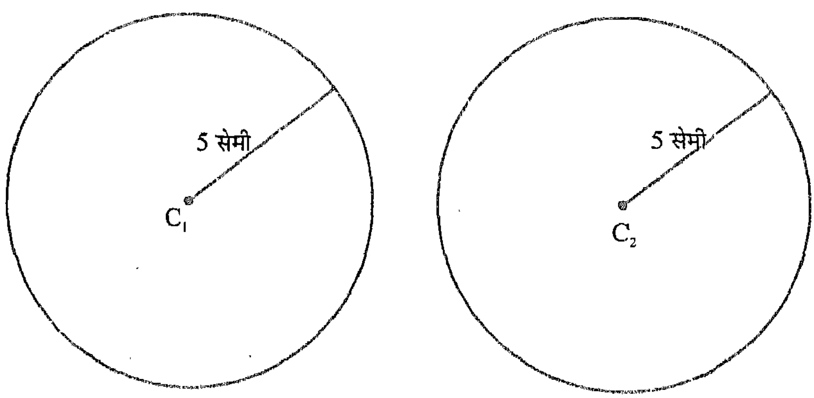
एक वृत्त तल को तीन भागों में विभाजित करता है जिनके नाम *अभ्यंतर* (*interior*), *बहिर्भाग* (*exterior*) और *स्वयं वह वृत्त* है। वृत्त अपने अभ्यंतर के साथ मिलकर *वृत्तीय क्षेत्र* (*circular region*) कहलाता है। एक जीवा वृत्तीय क्षेत्र को दो भागों में विभाजित करती है, जिनको वृत्तीय क्षेत्र का *खंड* या संक्षेप में *वृत्तखंड* (*segment of circle*) कहते हैं। छोटे खंड को *लघु वृत्तखंड* (*minor segment*) और बड़े खंड को *दीर्घ वृत्तखंड* (*major segment*) कहते हैं। दोनों खंडों के बराबर होने की स्थिति में, प्रत्येक को *अर्धवृत्ताकार क्षेत्र* (*semicircular region*) कहते हैं (आकृति 9.1)।



आकृति 9.1

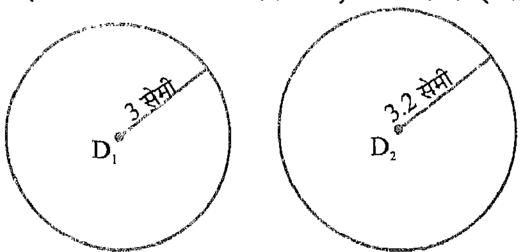
9.3 वृत्तों की सर्वांगसमता

आइए हम दो वृत्त बनाएँ जिनके केंद्र C_1 और C_2 हों, परंतु उनकी त्रिज्याएँ समान (माना 5 सेमी) हों (आकृति 9.2)। अब हम वृत्त जिसका केंद्र C_1 है, काटकर बाहर निकालते हैं (अथवा अक्स कागज (tracing paper) पर उसका अनुरेखण करते हैं) और केंद्र C_2 वाले वृत्त पर इस प्रकार अध्यारोपित करते हैं कि C_1 और C_2 संपाती हों। हम देखते हैं कि प्रथम वृत्त दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लेता है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि दोनों वृत्त सर्वांगसम हैं।



आकृति 9.2

हम इस क्रियाकलाप को समान त्रिज्याओं के विभिन्न वृत्त-युग्मों को बनाकर दोहरा सकते हैं। हम हर बार देखेंगे कि प्रत्येक वृत्त-युग्म के वृत्त सर्वांगसम हैं। आइए, अब हम केंद्र D_1 और D_2 के दो वृत्त पृथक् त्रिज्याओं (माना 3 सेमी और 3.2 सेमी) के खींचें (आकृति 9.3)।



आकृति 9.3

अब हम प्रथम वृत्त को काटकर द्वितीय वृत्त पर रखते हैं। हम देखेंगे कि दोनों वृत्त एक-दूसरे को पूर्णरूप से ढक नहीं पाते हैं। इस प्रकार, हम पाते हैं :

गुणधर्म 9.1 : *दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनकी त्रिज्याएँ समान हों।*

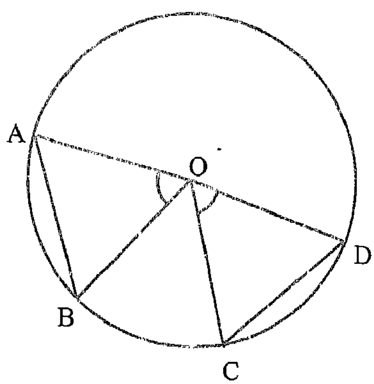
9.4 समान जीवाएँ और सर्वांगसम चाप

आइए एक वृत्त जिसका केंद्र O है तथा उसकी दो बराबर जीवाओं AB और CD पर विचार करें (आकृति 9.4)। स्पष्टत:, हम कह सकते हैं कि :

$\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (भुजा-भुजा-भुजा)

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इस प्रकार, AB और CD द्वारा केंद्र O पर अंतरित कोण बराबर हैं।



आकृति 9.4

विलोमत:, यदि $\angle AOB = \angle COD$ है, तब आकृति से हमें मिलता है कि

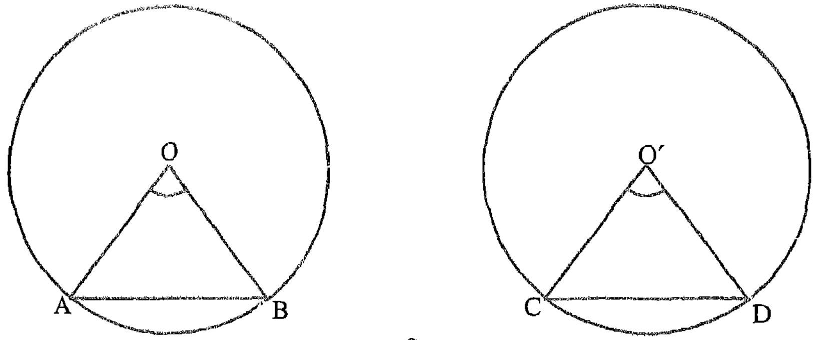
$\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (भुजा-कोण-भुजा)

$\therefore$ $AB = CD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अर्थात् यदि जीवाओं द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो *जीवाएँ* बराबर होती हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

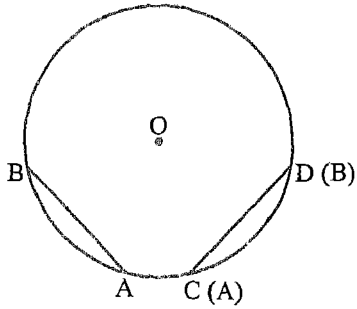
गुणधर्म 9.2 : *वृत्त की बराबर जीवाएँ केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं और विलोमत: यदि जीवाओं द्वारा वृत्त के केंद्र पर अंतरित कोण बराबर हों, तो जीवाएँ बराबर होती हैं।*

टिप्पणी : हम उपर्युक्त परिणाम की पुष्टि दो भिन्न सर्वांगसम वृत्तों की बराबर जीवाओं के लिए भी उपर्युक्त विधि से ही कर सकते हैं (आकृति 9.5)।



आकृति 9.5

अब हम दो चापों की सर्वांगसमता के बारे में क्या कह सकते हैं? आइए ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता पर पुन: ध्यान दें। स्पष्ट रूप से, दो चाप AB और CD सर्वांगसम होंगे, यदि बिना झुकाए या मरोड़े, हम एक चाप को दूसरे चाप के ऊपर (अक्स कागज का उपयोग कर) इस प्रकार अध्यारोपित कर सकें जिससे कि दोनों चाप संपाती हो जाएँ (आकृति 9.6)।



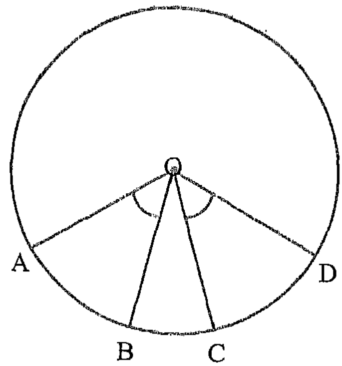
आकृति 9.6

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में *जीवा* AB, *जीवा* CD के संपाती होगी। इस प्रकार, AB = CD है। इसी प्रकार, किसी वृत्त की दो बराबर जीवाएँ AB और CD को लेकर तथा उनको अध्यारोपित कर, हम चाप AB ≅ चाप CD प्रदर्शित कर सकते हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.3 : *यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हों, तो उनकी संगत जीवाएँ बराबर होती हैं और विलोमत: यदि किसी वृत्त की दो जीवाएँ बराबर हों, तो उनके संगत चाप सर्वांगसम होते हैं।*

गुणधर्मों 9.2 और 9.3 से, हम निम्न गुणधर्म प्राप्त कर सकते हैं (आकृति 9.7) :

गुणधर्म 9.4 : *किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम होते हैं, यदि उनके द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण बराबर हों और विलोमत: यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वांगसम हैं, तो वे केंद्र पर बराबर कोण अंतरित करते हैं।*

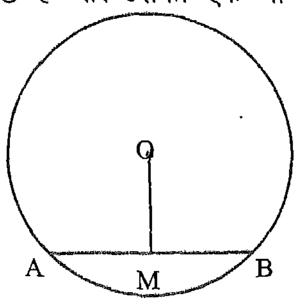


आकृति 9.7

टिप्पणी : किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण को उस चाप का *केंद्रीय कोण* (*central angle*) या *चाप की डिग्री माप* (यदि मापन डिग्री में हो) कहते हैं।

9.5 केंद्र से जीवा पर लंब

आइए एक वृत्त लें जिसका केंद्र O है और उसकी एक जीवा AB खींचें। O से AB पर OM लंब डालिए (आकृति 9.8)।

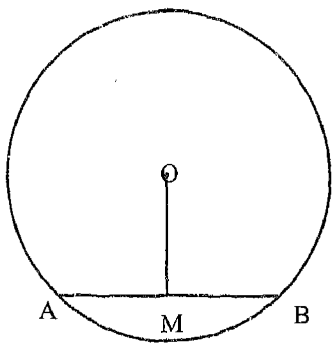


आकृति 9.8

AM और BM को मापकर हम आसानी से देख सकते हैं कि AM = BM है, अर्थात् OM जीवा AB को समद्विभाजित करता है। AM = BM है, इस तथ्य की पुष्टि हम आसानी से आकृति को OM के अनुदिश मोड़ कर भी कर सकते हैं। इसको $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (समकोण-कोण-भुजा द्वारा) स्थापित करके भी सिद्ध किया जा सकता है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.5 : *एक वृत्त के केंद्र से किसी जीवा पर खींचा गया लंब उस जीवा को समद्विभाजित करता है।*

इस कथन का विलोम भी सत्य है। इसके लिए, एक वृत्त लीजिए जिसका केंद्र O है और एक जीवा माना AB खींचिए। अब हम जीवा AB को समद्विभाजित करके उसका मध्य-बिंदु M निकालते हैं (आकृति 9.9)। हम वास्तविक मापन द्वारा देखते हैं कि $\angle OMA = 90^\circ$, अर्थात् $OM \perp AB$ है। इस तथ्य की पुष्टि हम आकृति को इस प्रकार मोड़कर जिससे A, B पर पड़े, कर सकते हैं। हम पाएँगे कि मोड़ वाली रेखा OM के अनुदिश है। इसको पुनः हम $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (भुजा-भुजा-भुजा) से दर्शा कर सिद्ध कर सकते हैं।



आकृति 9.9

इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.6 : *वृत्त के केंद्र से खींची गई रेखा जो किसी जीवा को समद्विभाजित करती है, उस जीवा पर लंब होती है।*

टिप्पणी : उपर्युक्त से, हम आसानी से कह सकते हैं कि एक वृत्त की किसी जीवा का लंब समद्विभाजक, उसके केंद्र से होकर जाता है।

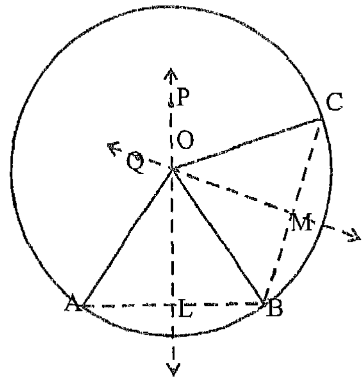
अब हम एक महत्त्वपूर्ण परिणाम तीन असरेख बिंदुओं से होकर जाने वाले एक अद्वितीय वृत्त के संबंध में प्राप्त करेंगे।

प्रमेय 9.1 : *तीन असरेख बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही वृत्त जाता है।*

दिया है : तीन असंरेख बिंदु A, B और C हैं।

सिद्ध करना है : बिंदुओं A, B और C से होकर जाने वाला एक और केवल एक ही वृत्त है।

रचना : रेखाखंड AB और BC खींचिए। AB और BC के लंब समद्विभाजक, क्रमश: PL और QM खींचिए। क्योंकि AB, BC के समांतर नहीं है, इसलिए PL भी QM के समांतर नहीं होगा। इसलिए वे किसी बिंदु O पर प्रतिच्छेद करेंगे। OA, OB और OC को मिलाइए (आकृति 9.10)।



आकृति 9.10

उपपत्ति : O, AB के लंब समद्विभाजक PL पर स्थित है।

$\therefore$ OA = OB (1)

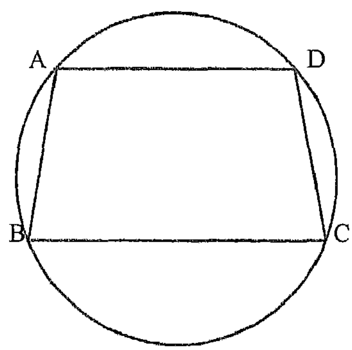
इसी प्रकार, OB = OC (2)

इसलिए (1) और (2) से,

$$OA = OB = OC = r, \text{ माना।}$$

त्रिज्या r लेकर और O केंद्र मानकर एक वृत्त खींचिए। वह बिंदुओं A, B और C से होकर जाएगा।

इससे यह सिद्ध होता है कि A, B और C से होकर एक वृत्त जाता है। अब हम यह सिद्ध करेंगे कि A, B और C से होकर जाने वाला केवल यही एक वृत्त है। यदि संभव हो, तो मान लीजिए कि A,B और C से जाने वाला दूसरा वृत्त भी है जिसका केंद्र O′ और त्रिज्या s है। तब O′, PL और QM के लंब समद्विभाजक पर अवश्य स्थित होगा। चूंकि दो रेखाएँ एक से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेद नहीं कर सकती हैं, अत: O′ और O संपाती होंगे। इसलिए, OA = O′A = r (= s) है। अर्थात् A, B और C से जाने वाला एक और केवल एक ही (अद्वितीय) वृत्त है।



आकृति 9.11

अब हम कुछ उदाहरणों से इन परिणामों का प्रयोग स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1 : आकृति 9.11 में, $\widehat{BAD} \cong \widehat{CDA}$ है। सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

हल : $\widehat{BAD} \cong \widehat{CDA}$ (दिया है)

$\therefore$ $\widehat{BAD} - \widehat{AD} \cong \widehat{CDA} - \widehat{AD}$

या $\quad \overset{\frown}{BA} \cong \overset{\frown}{CD}$

$\therefore \quad AB = CD \quad$ (गुणधर्म 9.3)

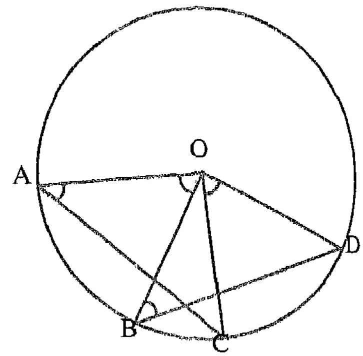
उदाहरण 2 : आकृति 9.12 में, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ है। सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ है।

हल : $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ (दिया है)

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD \quad$ (गुणधर्म 9.4)

$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$

या $\quad \angle AOC = \angle BOD \quad$ (1)



आकृति 9.12

अब Δ AOC और Δ BOD में,

$OA = OB \quad$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OC = OD \quad$ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

और $\quad \angle AOC = \angle BOD \quad$ [(1) से]

$\therefore \quad \Delta AOC \cong \Delta BOD \quad$ (भुजा-कोण-भुजा)

इसलिए, $\quad \angle A = \angle B \quad$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

उदाहरण 3 : एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जिनकी लंबाइयाँ क्रमशः 5 सेमी और 11 सेमी हैं, एक-दूसरे के समांतर हैं तथा वे वृत्त के केंद्र के एक ही ओर स्थित हैं। यदि AB और CD के बीच 3 सेमी की दूरी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : AB का लंब समद्विभाजक OL और CD का लंब समद्विभाजक OM खींचिए, जहाँ O वृत्त का केंद्र है।

चूंकि AB || CD है, इसलिए OM और OL एक ही रेखा में हैं, अर्थात् O, M और L सरेख हैं। अब OB और OD को मिलाइए। मान लीजिए OM = x सेमी है और वृत्त की त्रिज्या r सेमी है।

तब ΔOMD से,

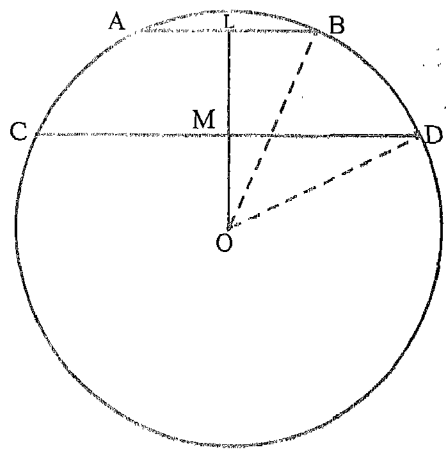
$$OD^2 = OM^2 + MD^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)}$$

या $$r^2 = x^2 + \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

या $$r^2 = x^2 + \frac{121}{4} \qquad (1)$$

Δ OLB से,

$$OB^2 = OL^2 + LB^2 \quad \text{(पाइथागोरस प्रमेय)}$$



आकृति 9.13

या $$r^2 = (x+3)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

या $$r^2 = x^2 + 6x + 9 + \frac{25}{4} \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर, हमें मिलता है :

$$0 = -6x - 9 + \frac{96}{4}$$

या $$6x = -9 + 24$$

या $$6x = 15$$

या $$x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

(1) में $x = \frac{5}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$$

या $$r^2 = \frac{25}{4} + \frac{121}{4}$$

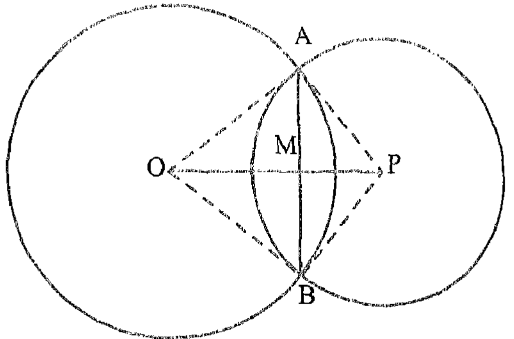
या $$r^2 = \frac{146}{4}$$

या $$r = \frac{\sqrt{146}}{2}$$

अर्थात्, वृत्त की त्रिज्या $\frac{\sqrt{146}}{2}$ सेमी है।

उदाहरण 4 : यदि दो वृत्त, एक-दूसरे को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करते हों, तो सिद्ध कीजिए कि उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा उनकी उभयनिष्ठ जीवा का लंब समद्विभाजक होती है।

हल : मान लीजिए दो वृत्त जिनके केंद्र O और P हैं, A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 9.14)। हमको सिद्ध करना है कि OP, AB का लंब समद्विभाजक है। इसके लिए, हम OA, OB, PA और PB को मिलाते हैं और मान लेते हैं कि OP, AB को M पर प्रतिच्छेदित करती है।



आकृति 9.14

Δ OAP और Δ OBP में,

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$PA = PB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta OAP \cong \Delta OBP$ (भुजा-भुजा-भुजा)

या $\angle AOP = \angle BOP$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अर्थात् $\angle AOM = \angle BOM$ (1)

अब ΔAOM और ΔBOM में,

$OA = OB$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle AOM = \angle BOM$ [(1) से]

और $OM = OM$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta AOM \cong \Delta BOM$ (भुजा-कोण-भुजा)

या $AM = BM$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (2)

तथा $\angle AMO = \angle BMO$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग) (3)

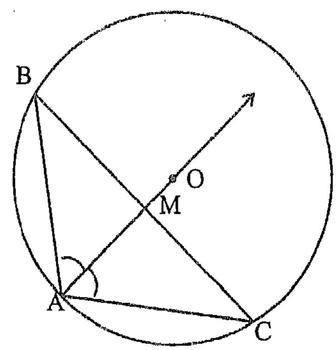
परंतु $\angle AMO + \angle BMO = 180^\circ$ (रैखिक युग्म)

$\therefore$ $\angle AMO = \angle BMO = 90^\circ$ (4)

$\therefore$ OM अर्थात् OP, AB का लंब समद्विभाजक है [(2) और (4) से]।

उदाहरण 5 : किसी वृत्त की दो जीवाएँ AB और AC बराबर हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ का समद्विभाजक वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है।

हल : माना $\angle BAC$ का समद्विभाजक BC को M पर प्रतिच्छेदित करता है (आकृति 9.15)।



आकृति 9.15

ΔABM और ΔACM में,

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAM = \angle CAM$ (AM, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है)

और $AM = AM$ (उभयनिष्ठ)

$\therefore$ $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ (भुजा-कोण-भुजा)

इस प्रकार, $BM = CM$

और $\angle BMA = \angle CMA$ (1)

परंतु $\angle BMA + \angle CMA = 180°$ (रैखिक युग्म) (2)

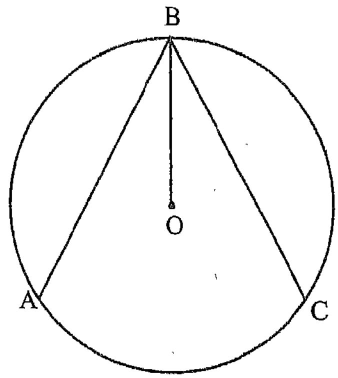
$\therefore$ $\angle BMA = 90°$ [(1) और (2) से]

अर्थात् AM जीवा BC का लंब समद्विभाजक है।

अतः, वह वृत्त के केंद्र O से होकर जाएगा (गुणधर्मों 9.5 और 9.6 से)।

प्रश्नावली 9.1

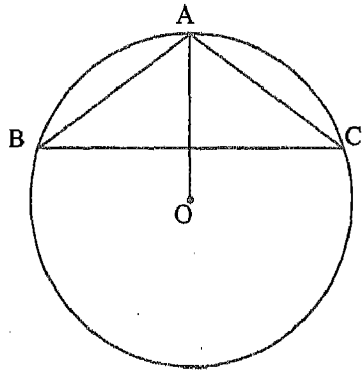
1. आकृति 9.16 में, AB = CB है और O वृत्त का केंद्र है। सिद्ध कीजिए कि BO, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है।



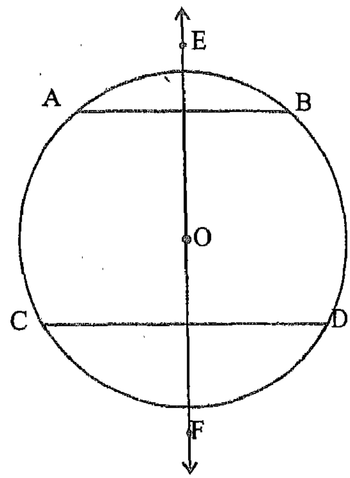
आकृति 9.16

2. दो वृत्त, जिनके केंद्र A और B हैं, C और D पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle ACB = \angle ADB$ है।

3. आकृति 9.17 में, $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC}$ है और O वृत्त का केंद्र है। सिद्ध कीजिए कि OA, BC का लंब समद्विभाजक है।



आकृति 9.17



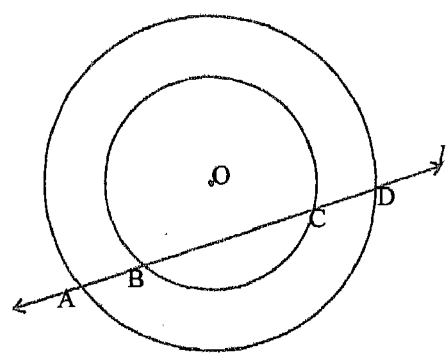
आकृति 9.18

4. आकृति 9.18 में, EF वृत्त के केंद्र O से जाने वाली एक रेखा है। यदि EF वृत्त की जीवाओं AB और CD को समद्विभाजित करती हो, तो सिद्ध कीजिए कि AB || CD है।

5. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त की दो समांतर जीवाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा वृत्त के केंद्र से होकर जाती है।

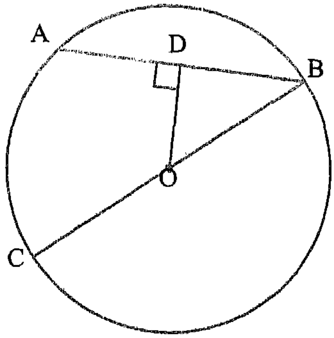
6. एक रेखा *l* दो संकेंद्री वृत्तों को (अर्थात् वृत्त जिनके केंद्र एक ही हों) जिनका केंद्र O है, A, B, C और D पर प्रतिच्छेदित करती है (आकृति 9.19)। सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

7. किसी वृत्त की, जिसका केंद्र O है, AB और BC दो जीवाएँ इस प्रकार की हैं कि ∠ABO = ∠CBO है। सिद्ध कीजिए कि AB = CB है।



आकृति 9.19

8. आकृति 9.20 में, OD किसी वृत्त जिसका केंद्र O है, की जीवा AB का लंब समद्विभाजक है। यदि BC एक व्यास हो, तो सिद्ध कीजिए कि CA = 2 OD है।



आकृति 9.20

9. AB और CD एक वृत्त, जिसका व्यास AC है, की समांतर जीवाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

10. किसी वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RS परस्पर समांतर हैं और AB, PQ का लंब समद्विभाजक है। बिना किसी रचना का उपयोग किए, सिद्ध कीजिए कि AB, RS को समद्विभाजित करता है।

11. एक रेखाखंड AB की लंबाई 5 सेमी है। A और B से होकर जाने वाला 4 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। क्या आप A और B से होकर जाने वाला 2 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींच सकते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि के लिए कारणों को लिखिए।

12. किसी वृत्त के केंद्र को ज्ञात करने की एक विधि लिखिए।

13. किसी दिए हुए वृत्त का एक चाप दिया हुआ है। दर्शाइए कि इससे पूरा वृत्त कैसे बनाएँगे।

14. सिद्ध कीजिए कि दो भिन्न वृत्त एक-दूसरे को दो से अधिक बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित नहीं कर सकते हैं।

15. एक वृत्त की दो समांतर जीवाएँ AB और CD (केंद्र के विपरीत ओर) इस प्रकार हैं कि AB = 10 सेमी और CD = 24 सेमी है। यदि AB और CD के बीच की दूरी 17 सेमी हो, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

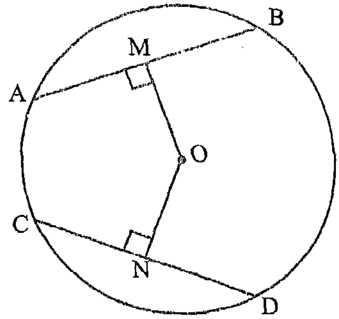
16. 5 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त की जीवाएँ AB और AC ऐसी हैं कि AB = AC = 6 सेमी है। जीवा BC की लंबाई ज्ञात कीजिए।

17. एक वृत्त, जिसका केंद्र O है और त्रिज्या 10 सेमी है, की दो समांतर जीवाएँ PQ और RS हैं। यदि PQ = 16 सेमी और RS = 12 सेमी हो, तो PQ और RS के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए, यदि वे स्थित हों

(i) केंद्र O के एक ही ओर।

(ii) केंद्र O के विपरीत ओर।

9.6 केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ

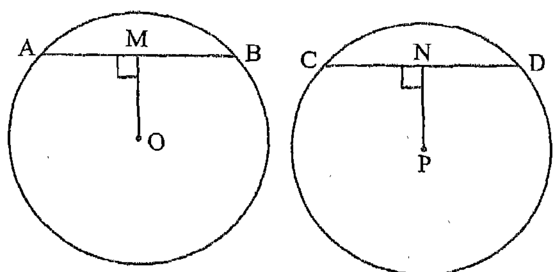


आकृति 9.21

आइए अब वृत्त की दो जीवाओं के संबंध में एक अन्य परिणाम की जाँच करें। आइए एक अक्स कागज लें और उस पर केंद्र O का एक वृत्त खींचें तथा उसकी दो समान लंबाई की जीवाएँ AB और CD परकार की सहायता से बनाएँ (आकृति 9.21)। अब हम $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ खींचें। आइए अब हम कागज को इस प्रकार मोड़ें कि C, A पर और D, B पर पड़े। यह संभव है, क्योंकि AB = CD है। हम देखते हैं कि N, M पर पड़ता है और मुड़ी हुई रेखा O से जाती है।

इस प्रकार, OM = ON है, अर्थात् AB और CD, O से समान दूरी पर स्थित हैं। हम इस क्रियाकलाप को अनेक वृत्त और उनकी बराबर जीवाएँ खींचकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हमको वही परिणाम प्राप्त होगा। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि *वृत्त की समान जीवाएँ केंद्र से समदूरस्थ होती हैं*।

यदि हम दो सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाएँ लें, तो आप क्या आशा कर सकते हैं? हम दो अक्स कागजों पर दो सर्वांगसम वृत्त और दो समान जीवाएँ AB और CD खींचते हैं (आकृति 9.22)। अब हम $OM \perp AB$ और $PN \perp CD$ उनके केंद्रों क्रमशः O तथा P से खींचते हैं। इसके बाद पहले वृत्त को दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि O, P पर पड़े और A, C पर पड़े। हम पाते हैं कि B, D पर तथा M, N पर पड़ते हैं। इस प्रकार, OM = PN है। अर्थात् पुनः दोनों जीवाएँ अपने केंद्रों से समान दूरी पर स्थित हैं। इस प्रकार, *सर्वांगसम वृत्तों की समान जीवाएँ उनके केंद्रों से बराबर दूरी पर स्थित होती हैं।* पिछले परिणाम तथा इस परिणाम से हमें प्राप्त होता है :

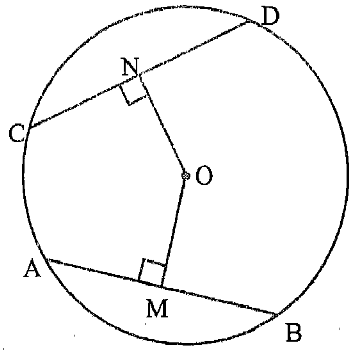


आकृति 9.22

गुणधर्म 9.7 : *किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की समान जीवाएँ केंद्र (केंद्रों) से समदूरस्थ होती हैं।*

इस परिणाम के विलोम का सत्यापन हम निम्न प्रकार से कर सकते हैं :

हम एक अक्स कागज लें और उस पर एक वृत्त खींचें जिसका केंद्र O है। एक जीवा AB खींचिए और O से $OM \perp AB$ डालिए। फिर वृत्त के अभ्यंतर में एक बिंदु N इस प्रकार चिह्नित कीजिए कि OM = ON हो। अब N से होकर जीवा CD ऐसी खींचिए कि $ON \perp CD$ हो (आकृति 9.23)। कागज को मोड़कर हम आसानी से देख सकते हैं कि CD, AB को पूर्णतः ढक लेती है, अर्थात् AB = CD है। इस प्रकार, *किसी वृत्त में केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं।*



आकृति 9.23

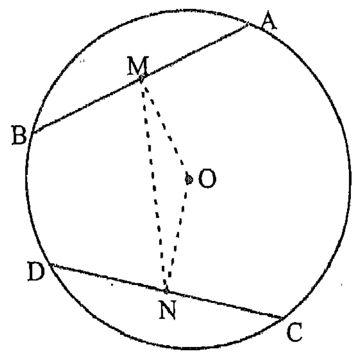
इसी प्रकार का क्रियाकलाप इस कथन की सत्यता की जाँच के लिए भी किया जा सकता है कि सर्वांगसम वृत्तों में केंद्रों से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.8 : *किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्तों) की जीवाएँ, जो केंद्र (केंद्रों) से समदूरस्थ होती हैं, बराबर होती हैं।*

अब हम कुछ उदाहरणों से इन गुणधर्मों की उपयोगिता प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 6 : एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, की AB और CD दो बराबर जीवाएँ हैं (आकृति 9.24)। यदि AB का मध्य-बिंदु M और CD का मध्य-बिंदु N हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle AMN = \angle CNM$ है।

हल : आइए हम MN, OM और ON को मिलाएँ।



आकृति 9.24

AB = CD (दिया है)

$\therefore$ OM = ON (गुणधर्म 9.7)

$\therefore$ $\angle OMN = \angle ONM$ (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) (1)

अब जबकि M और N, AB और CD के मध्य-बिंदु हैं, तो हमें प्राप्त होता है कि

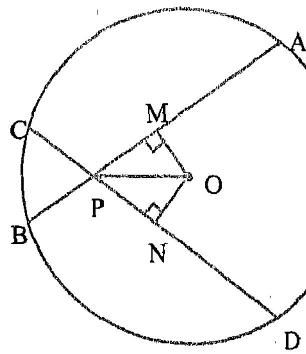
$OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ है (गुणधर्म 9.6)

$\therefore$ $\angle OMA = \angle ONC$ (प्रत्येक बराबर है $90°$) (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\angle OMA + \angle OMN = \angle ONC + \angle ONM$$

या $\angle AMN = \angle CNM$



आकृति 9.25

उदाहरण 7 : आकृति 9.25 में, O केंद्र वाले वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD हैं। दोनों जीवाएँ परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करती हैं। यदि PO, $\angle APD$ को समद्विभाजित करता हो, तो सिद्ध कीजिए कि AB = CD है।

हल : O से, AB पर लंब OM तथा CD पर लंब ON डालिए।

अब ΔOMP और ΔONP से,

$\angle OMP = \angle ONP$ (प्रत्येक बराबर है 90^o)

$\angle MPO = \angle NPO$ (PO समद्विभाजक है $\angle MPN$ का)

OP = OP (उभयनिष्ठ भुजा)

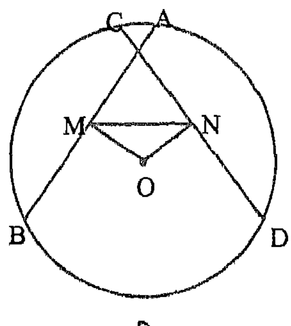
$\therefore \Delta OMP \cong \Delta ONP$ (कोण-कोण-भुजा)

इसलिए, OM = ON (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अतः, AB = CD (केंद्र से समदूरस्थ जीवाएँ बराबर होती हैं)

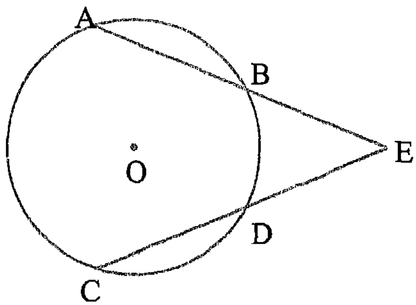
प्रश्नावली 9.2

1. आकृति 9.26 में, एक वृत्त की, जिसका केंद्र O है, AB और CD दो बराबर जीवाएँ हैं। यदि $OM \perp AB$ और $ON \perp CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle OMN = \angle ONM$ है।

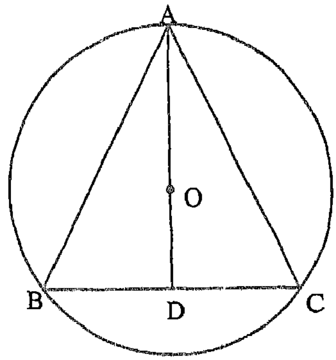


आकृति 9.26

2. एक वृत्त की, जिसका केंद्र O है, AB और CD दो बराबर जीवाएँ हैं। ये जीवाएँ बढ़ाए जाने पर E पर मिलती हैं (आकृति 9.27)। सिद्ध कीजिए कि EB = ED है।
[**संकेत** : O से AB और CD पर लंब डालिए।]



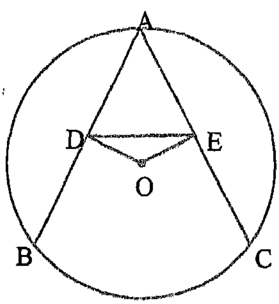
आकृति 9.27



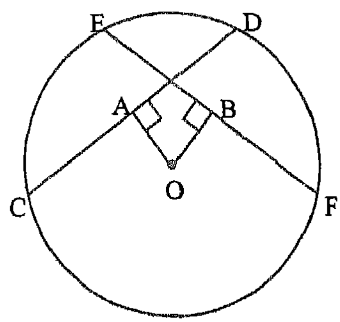
आकृति 9.28

3. Δ ABC के $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD, ΔABC के परिवृत्त के केंद्र O से होकर जाता है (आकृति 9.28)। सिद्ध कीजिए कि AB = AC है।

4. आकृति 9.29 में, AB और AC एक वृत्त की, जिसका केंद्र O है, बराबर जीवाएँ हैं। यदि $OD \perp AB$ और $OE \perp AC$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ADE एक समद्विबाहु त्रिभुज है।



आकृति 9.29



आकृति 9.30

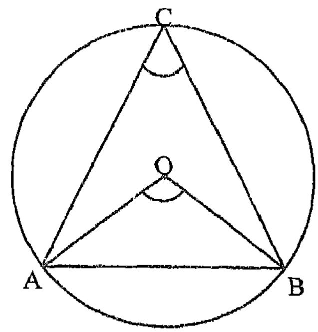
5. आकृति 9.30 में, एक वृत्त जिसका केंद्र O है की दो जीवाएँ CD और EF पर OA और OB क्रमशः लंब हैं। यदि OA = OB है, तो सिद्ध कीजिए कि $\overparen{EC} \cong \overparen{DF}$ है।

6. यदि किसी वृत्त की दो बराबर जीवाएँ परस्पर प्रतिच्छेदित करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि एक जीवा के क्रमित भाग दूसरी जीवा के संगत भागों के बराबर होते हैं।

9.7 चापों और जीवाओं द्वारा वृत्त पर स्थित बिंदुओं पर अंतरित कोण

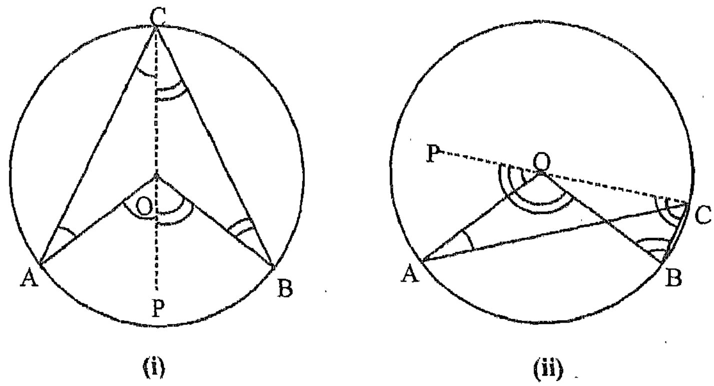
एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, के (लघु) चाप AB पर विचार कीजिए (आकृति 9.31)। यह चाप केंद्र पर ∠AOB अंतरित करता है। अब हम वृत्त के शेष भाग पर कोई बिंदु C लेते हैं। चाप AB द्वारा C पर अंतरित कोण ∠ACB है। ध्यान दीजिए कि जीवा AB भी C पर यही कोण अंतरित करती है।

निम्न प्रमेय में हम कोण AOB और कोण ACB के बीच एक संबंध स्थापित करेंगे।



आकृति 9.31

प्रमेय 9.2 : *किसी चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण उस चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।*



आकृति 9.32

दिया है : एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, का एक चाप AB केंद्र पर ∠AOB अंतरित करता है तथा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी बिंदु C पर ∠ACB अंतरित करता है (आकृति 9.32)।

सिद्ध करना है : ∠AOB = 2∠ACB

रचना : CO को मिलाइए और उसे बिंदु P तक बढ़ाइए। OA और OB को भी मिलाइए।

उपपत्ति : ΔAOC में,

OA = OC (वृत्त की त्रिज्याएँ)

∴ ∠OCA = ∠OAC (बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण)

साथ ही, $\angle POA = \angle OCA + \angle OAC$ (त्रिभुज का बहिष्कोण)

$\therefore \quad \angle POA = \angle OCA + \angle OCA$ (क्योंकि $\angle OCA = \angle OAC$)

या $\quad \angle POA = 2\angle OCA$ (1)

इसी प्रकार, Δ BOC लेकर, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$\angle POB = 2\angle OCB$ (2)

आकृति 9.32 (i) के लिए, (1) और (2) को जोड़ने पर, हमें मिलेगा :

$$\angle POA + \angle POB = 2(\angle OCA + \angle OCB)$$

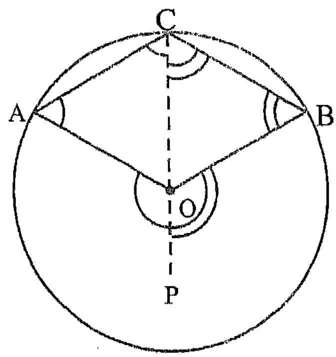
या $\quad \angle AOB = 2\angle ACB$

इसी प्रकार, आकृति 9.32 (ii) के लिए, (2) में से (1) को घटाने पर, हमें मिलता है :

$$\angle POB - \angle POA = 2(\angle OCB - \angle OCA)$$

या $\quad \angle AOB = 2\angle ACB$

टिप्पणी : यह प्रमेय दीर्घ चाप द्वारा अंतरित कोण के लिए भी सत्य है। ऊपर की ही प्रक्रिया का अनुगमन कर हम इसे सिद्ध कर सकते हैं (आकृति 9.33)।



आकृति 9.33

अब हम उस स्थिति का अध्ययन करेंगे जबकि चाप AB एक अर्धवृत्त हो (आकृति 9.34)। पहले की तरह हम OC को मिलाकर, बिंदु P तक बढ़ाते हैं। हम देखते हैं कि

$$\angle POA + \angle POB = 180°$$

$\therefore \quad \angle AOB = 180°$

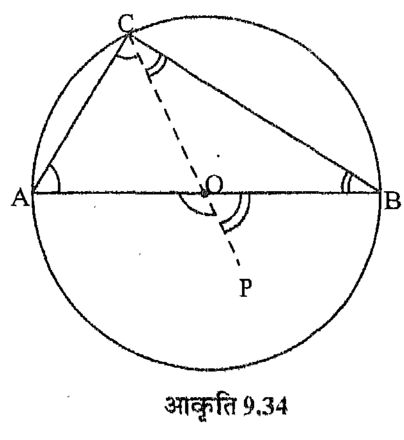
परंतु $\quad \angle AOB = 2\angle ACB$

या $\quad 180° = 2\angle ACB$

या $\quad \angle ACB = \frac{180°}{2} = 90°$ = एक समकोण

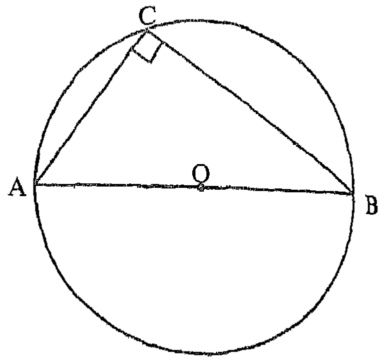
इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.9 : *अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।*



आकृति 9.34

इस गुणधर्म के विलोम के संबंध में हम क्या कह सकते हैं? इसके लिए हम एक समकोण त्रिभुज ABC लेते हैं जिसका कोण C समकोण है। आइए अब AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचें (आकृति 9.35)। क्या यह वृत्त सम्मुख शीर्ष C से होकर जाता है? हम स्मरण करें कि यदि हम कर्ण के मध्य-बिंदु को समकोण के शीर्ष से मिलाएँ, तो इस प्रकार बना रेखाखंड कर्ण का आधा होता है। इस प्रकार, OA = OB = OC है। अतः वृत्त C से अवश्य जाता है।



आकृति 9.35

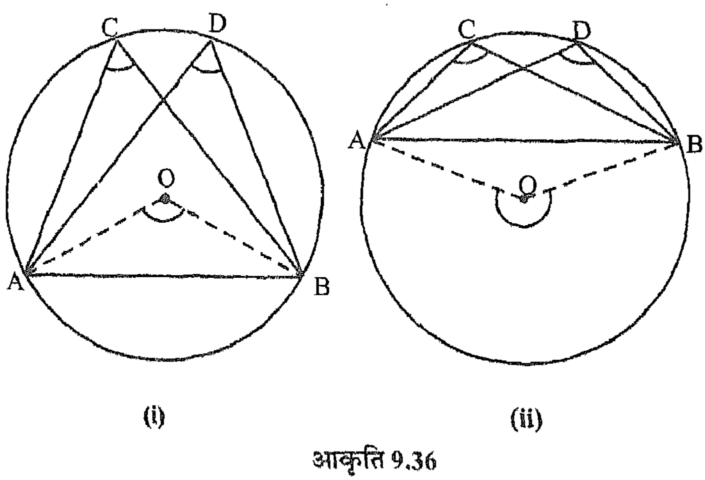
इस प्रकार, हम गुणधर्म 9.9 का निम्न विलोम प्राप्त करते हैं :

गुणधर्म 9.10 : *समकोण त्रिभुज के कर्ण को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, उसके सम्मुख शीर्ष से होकर जाता है अथवा वृत्त का चाप, जो वृत्त के शेष भाग पर समकोण अंतरित करता है, अर्धवृत्त होता है।*

टिप्पणी : ऊपर के गुणधर्म को हम इस प्रकार भी सिद्ध कर सकते हैं कि मान लें वृत्त C से नहीं जाता है और तब हम इसका एक विरोधाभास प्राप्त करें।

अब हम प्रमेय 9.2 का प्रयोग कर एक दूसरा महत्त्वपूर्ण प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 9.3 : *एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं।*



आकृति 9.36

दिया है : एक वृत्त जिसका केंद्र O है तथा $\angle ACB$ और $\angle ADB$ वृत्त के एक ही वृत्तखंड में बने दो कोण हैं [आकृति 9.36 (i) और (ii)]।

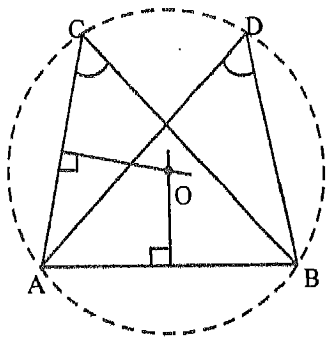
सिद्ध करना है : $\angle ACB = \angle ADB$

रचना : OA और OB को मिलाइए।

उपपत्ति :	$\angle AOB = 2\angle ACB$	(प्रमेय 9.2)	(1)
और	$\angle AOB = 2\angle ADB$		(2)
$\therefore$	$2\angle ACB = 2\angle ADB$	[(1) और (2) से]	
या	$\angle ACB = \angle ADB$		

टिप्पणी : यदि एक अर्धवृत्त पर C और D बिंदु हों, तो हम सरलता से देख सकते हैं कि $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ है।

इस प्रमेय के विलोम के बारे में हम क्या कह सकते हैं? इसके लिए आइए एक रेखाखंड AB खींचें और उसके एक ही ओर कोई दो बराबर कोण ACB और ADB बनाएँ (आकृति 9.37)। अब AB और AC के लंब समद्विभाजक खींचकर Δ ABC का परिकेंद्र O प्राप्त कीजिए। O को केंद्र मानकर और त्रिज्या OA लेकर, आइए एक वृत्त खींचें जो A, B और C से होकर जाता हो। क्या यह वृत्त D से भी होकर जाएगा? हाँ, वह जाएगा। हम इस क्रियाकलाप को कई बराबर कोणों के जोड़े बनाकर और इन तीन बिंदुओं से जाने वाले वृत्तों को बनाकर दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार हम पाएँगे कि वृत्त चौथे बिंदु से भी जाता है।



आकृति 9.37

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं :

गुणधर्म 9.11 : *यदि दो बिंदुओं को मिलाने वाला एक रेखाखंड, अपने एक ही ओर स्थित दो अन्य बिंदुओं पर बराबर कोण अंतरित करता हो, तो चारों बिंदु एक वृत्त पर स्थित होते हैं।*

टिप्पणियाँ :

1. उपर्युक्त गुणधर्म यह मानकर की तीन बिंदुओं से जाने वाला वृत्त चौथे बिंदु से नहीं जाता है और इस प्रकार इसका एक विरोधाभास प्राप्त करके भी सिद्ध कर सकते हैं।

2. एक वृत्त पर स्थित बिंदुओं को *एकवृत्तीय (conyclic)* और बहुभुज को जिसका प्रत्येक शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हो, *चक्रीय (cyclic) बहुभुज* कहते हैं।

9.8 चक्रीय चतुर्भुज के कोण

चतुर्भुज जिसके सभी (चारों) शीर्ष एक वृत्त पर स्थित होते हैं उसे *चक्रीय चतुर्भुज* कहते हैं। पूर्व कक्षाओं में आपने पढ़ा है कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण संपूरक (supplementary) होते हैं। हम यहाँ इस परिणाम को सिद्ध करेंगे।

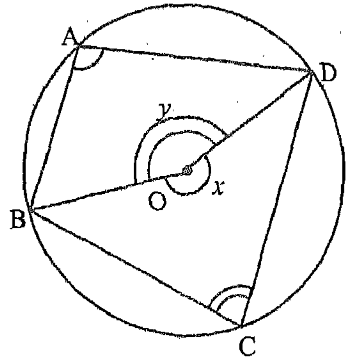
प्रमेय 9.4 : *चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी भी युग्म का योग* 180° *होता है।*

दिया है : एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD है।

सिद्ध करना है : $\angle BAD + \angle BCD = 180°$

तथा $\angle ADC + \angle CBA = 180°$

रचना : माना कि शीर्षों A, B,C और D से जाने वाले वृत्त का केंद्र O है। OB और OD को मिलाइए (आकृति 9.38)।



आकृति 9.38

उपपत्ति : $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$

$= \frac{1}{2}x$ (प्रमेय 9.2) (1)

(ध्यान दीजिए कि कोण BOD प्रतिवर्ती (reflex) कोण है।)

और $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BOD = \frac{1}{2}y$ (प्रमेय 9.2) (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

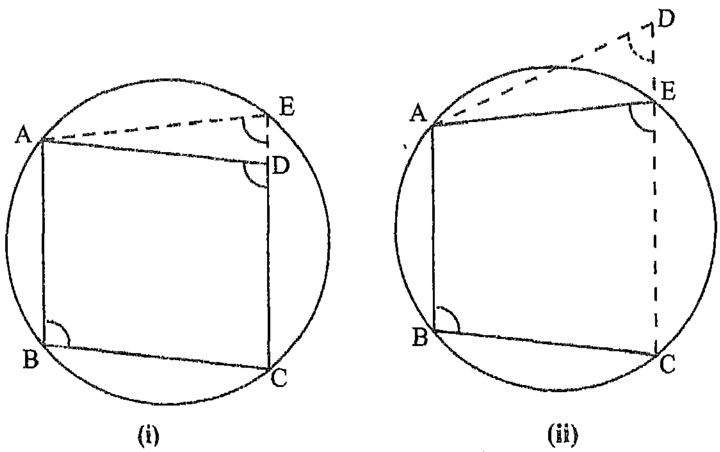
$$= \frac{1}{2}(x + y)$$

$$= \frac{1}{2} \times 360° = 180° \quad (\text{क्योंकि } x + y = 360°)$$

चूंकि चतुर्भुज के कोणों का योग 360° है, इसलिए

$$\angle ADC + \angle CBA = 60° - (\angle BAD + \angle BCD) = 360° - 180° = 180°$$

इस प्रमेय के विलोम के बारे में हम क्या कह सकते हैं? इसके लिए एक चतुर्भुज ABCD पर विचार कीजिए, जिसके एक सम्मुख कोणों के युग्म, मान लीजिए, ∠ABC और ∠ADC का योगफल 180° है (आकृति 9.39)। ध्यान दीजिए कि दूसरे सम्मुख कोणों के जोड़े का योग भी 180° होगा, क्योंकि किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360° होता है। मान लीजिए कि A, B और C से जाने वाला वृत्त D से नहीं जाता है और CD या CD के बढ़े भाग को E पर प्रतिच्छेदित करता है [आकृति 9.39 (i) और (ii)]।



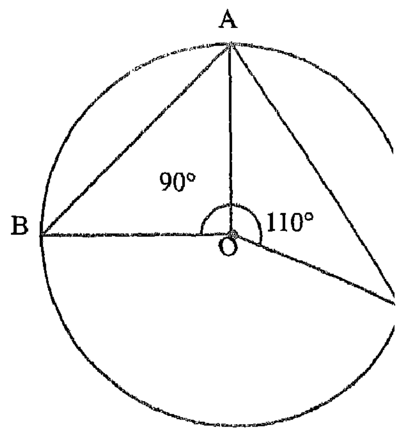
आकृति 9.39

अब स्पष्टत:,	$\angle B + \angle E = 180°$	(प्रमेय 9.4)
और	$\angle B + \angle D = 180°$	(दिया है)
इसलिए,	$\angle D = \angle E$	

परंतु यह संभव नहीं है, क्योंकि किसी त्रिभुज का बहिष्कोण, उस त्रिभुज के एक सुदूर (अभिमुख) अंत:कोण के बराबर नहीं हो सकता। इसलिए हमारी यह परिकल्पना कि A, B और C से होकर जाने वाला वृत्त D से होकर नहीं जाता है, गलत है। अर्थात् D वृत्त पर अवश्य स्थित होगा। दूसरे शब्दों में, A, B, C और D एकवृत्तीय (concyclic) हैं, अर्थात् ABCD चक्रीय चतुर्भुज है। इस प्रकार, हमें प्राप्त होता है :

गुणधर्म 9.12 : *यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म संपूरक हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है।*

अब हम इन परिणामों के प्रयोग को कुछ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।



आकृति 9.40

उदाहरण 8 : आकृति 9.40 में, तीन बिंदु A, B और C किसी वृत्त पर इस प्रकार स्थित हैं कि जीवाएँ AB और AC केंद्र O पर क्रमश: 90° और 110° के कोण अंतरित करती हैं। ∠BAC ज्ञात कीजिए।

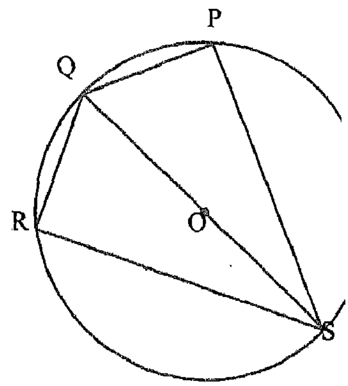
हल : $\angle BOC = 360° - (90° + 110°)$

$= 160°$ (1)

अब, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ (प्रमेय 9.2)

∴ $\angle BAC = \frac{1}{2} \times 160°$ [(1) से]

$= 80°$



आकृति 9.41

उदाहरण 9 : आकृति 9.41 में, किसी वृत्त की दो जीवाएँ PQ और RQ केंद्र O से समान दूरी पर स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि व्यास QS कोणों PQR और PSR को समद्विभाजित करता है।

हल : चूंकि PQ और RQ केंद्र O से समान दूरी पर स्थित हैं,

अत: PQ = RQ (1)

अब ΔPQS और ΔRQS में, हम पाते हैं :

PQ = RQ [(1) से]

$\angle QPS = \angle QRS = 90°$ (अर्धवृत्त के कोण)

और QS = QS

∴ $\Delta PQS \cong \Delta RQS$ (समकोण-कर्ण-भुजा)

अत:, $\angle PQS = \angle RQS$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

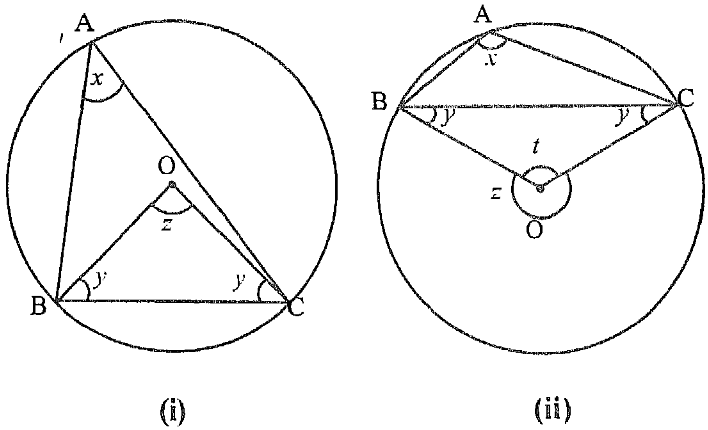
और $\angle PSQ = \angle RSQ$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

अर्थात् व्यास QS, कोणों PQR और PSR को समद्विभाजित करता है।

उदाहरण 10 : केंद्र O वाले वृत्त की एक जीवा BC है। चाप BC पर एक बिंदु A है, जैसा कि आकृति 9.42 (i) और (ii) में दिखाया गया है। सिद्ध कीजिए :

(i) $\angle BAC + \angle OBC = 90^\circ$, यदि A दीर्घ चाप पर एक बिंदु हो।

(ii) $\angle BAC - \angle OBC = 90^\circ$, यदि A लघु चाप पर एक बिंदु हो।



आकृति 9.42

हल :(i) $z = 2x$ (क्यों?) (1)

साथ ही, $z = 180^\circ - 2y$

$\therefore$ $2x = 180^\circ - 2y$ [(1) से]

या $2x + 2y = 180^\circ$

या $x + y = 90^\circ$

अर्थात् $\angle BAC + \angle OBC = 90^\circ$

(ii) $z = 2x$ (2)

तथा $t = 180^\circ - 2y$

$\therefore$ $z = 360^\circ - t$

$= 360^\circ - (180^\circ - 2y) = 180^\circ + 2y$

या $2x = 180^\circ + 2y$ [(2) से]

या $2x - 2y = 180^\circ$

या $x - y = 90^\circ$

अर्थात् $\angle BAC - \angle OBC = 90^\circ$

उदाहरण 11 : सिद्ध कीजिए कि दीर्घ वृत्तखंड का कोण न्यून कोण होता है।

हल : एक वृत्त, जिसका केंद्र O है, के दीर्घ वृत्तखंड में $\angle ACB$ लीजिए (आकृति 9.43)। हमें सिद्ध करना है कि $\angle ACB$ न्यून कोण है।

अब $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ (प्रमेय 9.2)

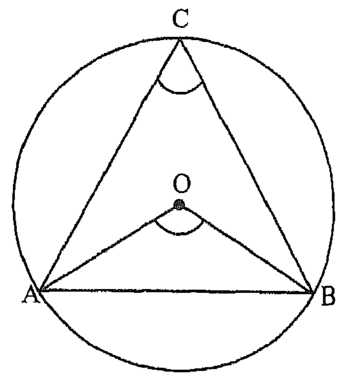
परंतु $\angle AOB < 180^\circ$

$\therefore$ $\frac{1}{2} \angle AOB < \frac{1}{2} \times 180^\circ$

अर्थात् $\frac{1}{2} \angle AOB < 90^\circ$

इस प्रकार, $\angle ACB < 90^\circ$ है।

अर्थात् दीर्घ वृत्तखंड में बना $\angle ACB$ न्यून कोण है।



आकृति 9.43

टिप्पणी : इसी प्रकार, यह सिद्ध किया जा सकता है कि किसी लघु वृत्तखंड में बना कोण अधिक कोण होता है।

उदाहरण 12 : आकृति 9.44 में, ABC एक त्रिभुज है जिसमें AB = AC है और AC पर P एक बिंदु है। C से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो BP के बढ़े भाग को Q पर इस प्रकार प्रतिच्छेदित करती है कि $\angle ABQ = \angle ACQ$ है। सिद्ध कीजिए :

$$\angle AQC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC$$

हल : $\angle ABQ = \angle ACQ$ (दिया है)

$\therefore$ बिंदु A, B, C और Q एकवृत्तीय हैं (गुणधर्म 9.11)

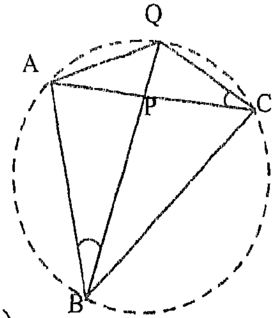
$\therefore$ $\angle BAC = \angle BQC$ (प्रमेय 9.3) (1)

तथा $\angle ACB = \angle AQB$ (प्रमेय 9.3) (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\angle BAC + \angle ACB = \angle BQC + \angle AQB$$

या $\angle BAC + \angle ACB = \angle AQC$ (3)



आकृति 9.44

अब, चूंकि AB = AC (दिया है), इसलिए

$$\angle ABC = \angle ACB \quad (4)$$

परंतु $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ (एक त्रिभुज के कोण)

$\therefore$ $\angle ACB + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ [(4) से]

या $2\angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$

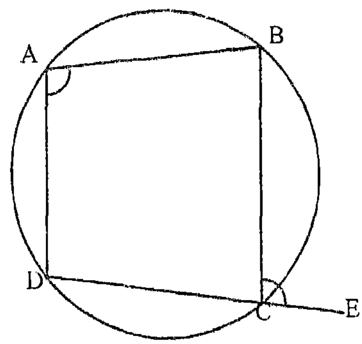
या $\angle ACB = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$

$\angle ACB$ का मान (3) में रखने पर, हमें मिलता है :

$$\angle BAC + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC = \angle AQC$$

अर्थात् $\angle AQC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle BAC.$

उदाहरण 13 : चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा DC एक बिंदु E तक बढ़ाई गई है (आकृति 9.45)। सिद्ध कीजिए कि $\angle BCE = \angle BAD$ है।



आकृति 9.45

हल : $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ (1)

साथ ही, $\angle BCD + \angle BCE = 180^\circ$ (रैखिक युग्म) (2)

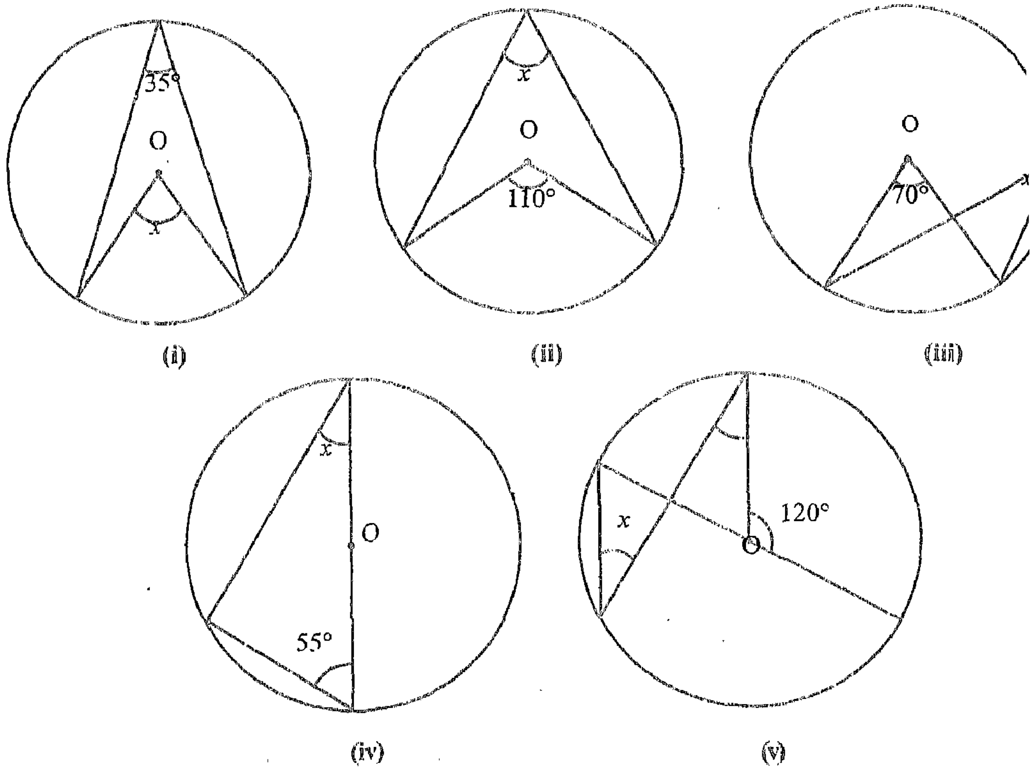
$\therefore$ $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle BCE$ [(1) और (2) से]

या $\angle BAD = \angle BCE$

टिप्पणी : कभी-कभी इस परिणाम को एक गुणधर्म की तरह भी प्रयोग करते हैं।

प्रश्नावली 9.3

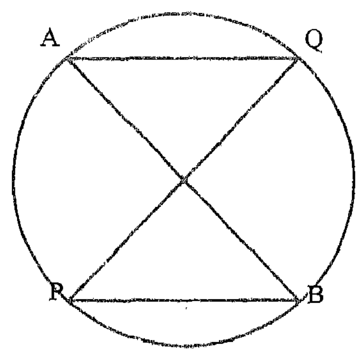
1. निम्न आकृतियों में x से चिह्नित कोणों को ज्ञात कीजिए, जहाँ O वृत्त का केंद्र है :



आकृति 9.46

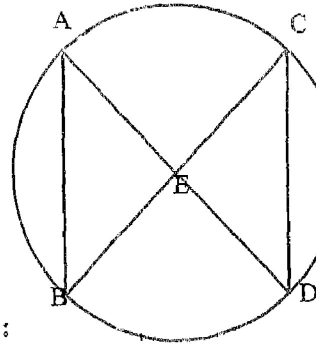
2. ABCD एक चक्रीय समलंब है जिसमें AD || BC है। यदि $\angle B = 70°$ हो, तो समलंब के शेष तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

3. आकृति 9.47 में, किसी वृत्त का एक व्यास AB जीवा PQ को समद्विभाजित करता है। यदि AQ || PB हो, तो सिद्ध कीजिए कि जीवा PQ भी वृत्त का व्यास है।



आकृति 9.47

4. आकृति 9.48 में, AB = CD है। सिद्ध कीजिए कि BE = DE और AE = CE है, जहाँ E, AD और BC का प्रतिच्छेद बिंदु है।



आकृति 9.48

5. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसमें AD || BC है। सिद्ध कीजिए कि AB = DC है।

6. ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है जिसके विकर्ण AC और BD, P पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AB = DC हो, तो सिद्ध कीजिए :

   (i) $\Delta PAB \cong \Delta PDC$

   (ii) PA = PD और PC = PB

   (iii) AD || BC

7. एक वृत्त के दो व्यास एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि उनके अंत बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंडों से बना चतुर्भुज एक वर्ग है।

8. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में AB = AC है। इसकी भुजा BC का मध्य-बिंदु D है। सिद्ध कीजिए कि बराबर भुजाओं में से किसी भी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त बिंदु D से होकर जाएगा।

9. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की किसी भी भुजा को व्यास मानकर खींचा गया वृत्त, उसके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाएगा।

10. दो वृत्त परस्पर बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AP और AQ दोनों वृत्तों के क्रमशः व्यास हों, तो सिद्ध कीजिए कि PBQ एक रेखा है।

11. दो सर्वांगसम वृत्त परस्पर बिंदुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। P से खींची गई एक रेखा वृत्तों से A और B पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि QA = QB है।

12. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण के मध्य-बिंदु को सम्मुख शीर्ष से मिलाने वाला रेखाखंड, कर्ण का आधा होता है।

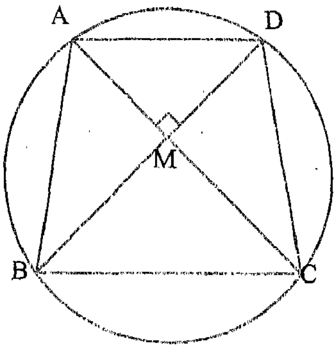
13. AC और BD एक वृत्त की जीवाएँ हैं जो एक-दूसरे को समद्विभाजित करती हैं। सिद्ध कीजिए :

   (i) AC और BD व्यास हैं।

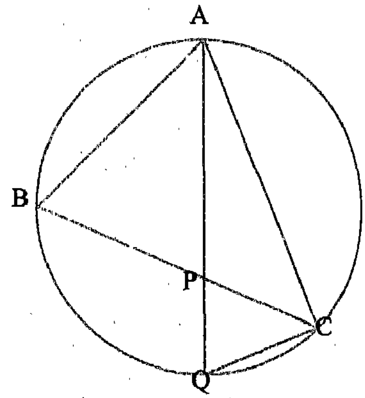
   (ii) ABCD एक आयत है।

14. ABC और ADC दो समकोण त्रिभुज हैं, जिनका उभयनिष्ठ कर्ण AC है। सिद्ध कीजिए कि $\angle CAD = \angle CBD$ है।

15. आकृति 9.49 में, एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD, M पर परस्पर समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि M से खींची गई कोई रेखा जो चतुर्भुज की किसी भुजा को समद्विभाजित करती है, उस भुजा की सम्मुख भुजा पर लंब होती है।



आकृति 9.49

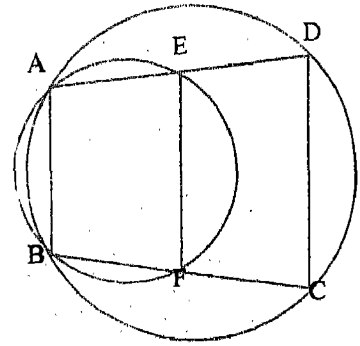


आकृति 9.50

16. आकृति 9.50 में, ABC एक त्रिभुज है और P भुजा BC पर इस प्रकार स्थित बिंदु है कि AB = AP है। यदि AP बढ़ाने पर Δ ABC के परिवृत्त से Q पर मिलती हो, तो सिद्ध कीजिए कि CP = CQ है।

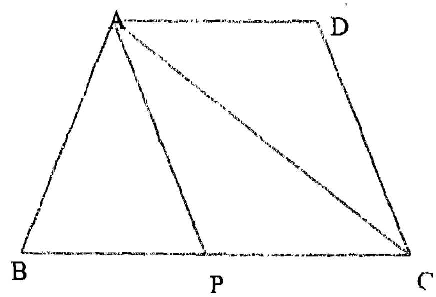
17. त्रिभुज ABC, जिसमें AB = AC है, के परिवृत्त पर D एक ऐसा बिंदु है कि B और D रेखा AC के विपरीत ओर स्थित हैं। यदि CD एक बिंदु E तक इस प्रकार बढ़ाई जाती है कि CE = BD हो, तो सिद्ध कीजिए कि AD = AE है।

18. आकृति 9.51 में, ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। एक वृत्त, जो A और B से होकर जाता है, AD और BC से क्रमशः बिंदुओं E और F पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि EF || DC है।



आकृति 9.51

19. त्रिभुज ABC की भुजा BC पर P एक बिंदु इस प्रकार स्थित है कि AB = AP है। शीर्षों A और C से क्रमशः BC और PA के समांतर रेखाएँ खींची जाती हैं जो D पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 9.52)। दर्शाइए कि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

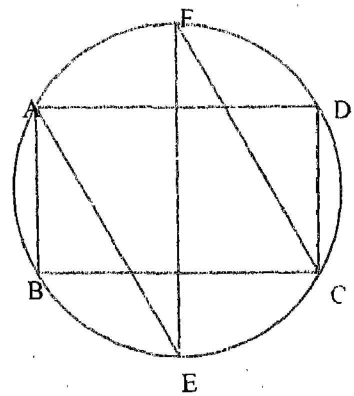


आकृति 9.52

20. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। एक वृत्त जो B और C से होकर जाता है, भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि DE || BC है।

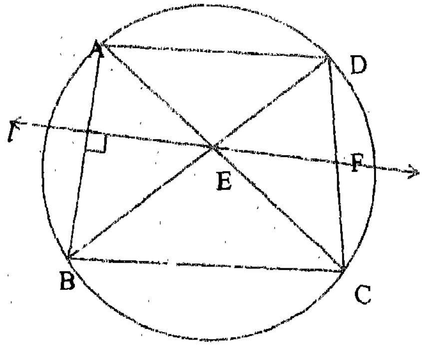
21. सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समांतर चतुर्भुज एक आयत होता है।

22. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोणों A और C के समद्विभाजक वृत्त को क्रमशः बिंदुओं E और F पर प्रतिच्छेदित करते हैं (आकृति 9.53)। सिद्ध कीजिए कि EF वृत्त का व्यास है।
[**संकेत** : A और F को मिलाइए।]



आकृति 9.53

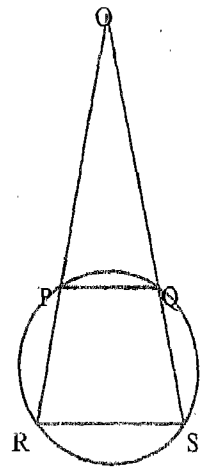
23. किसी चक्रीय चतुर्भुज के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को E पर समकोण पर प्रतिच्छेदित करते हैं (आकृति 9.54)। E से AB पर खींची गई एक लंब रेखा *l*, CD को F पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि F, CD का मध्य-बिंदु है।



आकृति 9.54

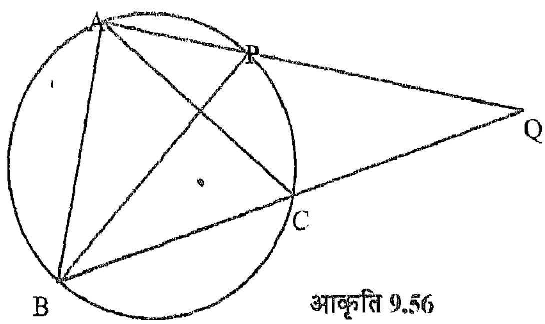
24. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के शीर्षों A, B और C से होकर जाने वाला वृत्त भुजा CD (या CD के बढ़े हुए भाग) को बिंदु P पर प्रतिच्छेदित करता है। सिद्ध कीजिए कि AP = AD है।

25. एक वृत्त की PQ और RS दो समांतर जीवाएँ हैं और रेखाएँ RP और SQ परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेदित करती हैं (आकृति 9.55)। सिद्ध कीजिए कि OP = OQ है।



आकृति 9.55

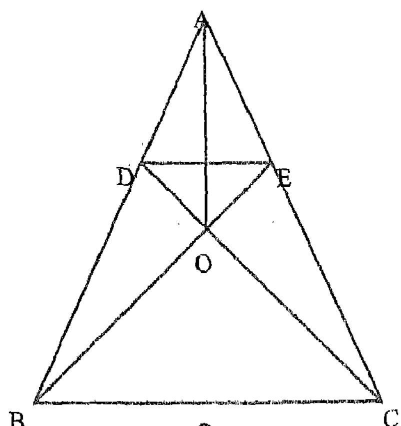
26. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में, AB = AC है। इसके ∠B का समद्विभाजक Δ ABC के परिवृत्त से P पर मिलता है (आकृति 9.56)। यदि AP और BC बढ़ाने पर बिंदु Q पर मिलती हों, तो सिद्ध कीजिए कि CQ = CA है।
[**संकेत :** C और P को मिलाइए।]



आकृति 9.56

27. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC पर क्रमशः बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि AD = AE है। सिद्ध कीजिए कि बिंदु B, C, E और D एकवृत्तीय हैं।

28. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की बराबर भुजाओं AB और AC पर क्रमशः दो बिंदु D और E इस प्रकार हैं कि B, C, E और D एकवृत्तीय हैं (आकृति 9.57)। यदि CD और BE का प्रतिच्छेद बिंदु O हो, तो सिद्ध कीजिए कि AO रेखाखंड DE का लंब समद्विभाजक है।

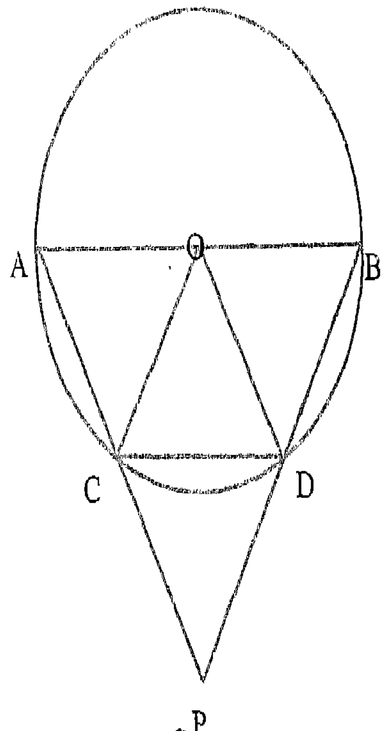


आकृति 9.57

29. यदि किसी समलंब की दोनों असमांतर भुजाएँ बराबर हों, तो सिद्ध कीजिए कि वह चक्रीय है।

30. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज की दो भुजाएँ समांतर हों, तो सिद्ध कीजिए कि
   (i) शेष दोनों भुजाएँ बराबर हैं।
   (ii) दोनों विकर्ण बराबर हैं।

31. AB एक वृत्त का व्यास है। वृत्त का केंद्र O है और उसकी जीवा CD त्रिज्या OC के बराबर है (आकृति 9.58)। AC और BD बढ़ाने पर बिंदु P पर मिलती हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle CPD = 60°$ है।



आकृति 9.58

32. त्रिभुज ABC के कोणों A, B और C के समद्विभाजक उसके परिवृत्त को क्रमशः बिंदुओं D, E और F पर प्रतिच्छेदित करते हैं।

   सिद्ध कीजिए कि Δ DEF के कोण क्रमशः $90° - \frac{A}{2}$, $90° - \frac{B}{2}$ और $90° - \frac{C}{2}$ हैं।

33. सिद्ध कीजिए कि यदि किसी त्रिभुज के एक कोण का समद्विभाजक तथा उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक प्रतिच्छेद करते हों, तो वे त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

   [संकेत : मान लीजिए कि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा भुजा BC का लंब समद्विभाजक बिंदु P पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि A, B, P और C एकवृत्तीय हैं।]

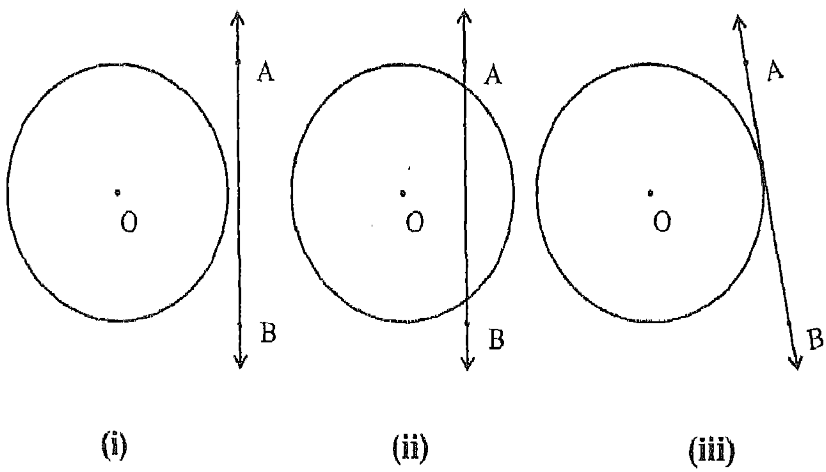
अध्याय 10

वृत्त की स्पर्श रेखाएँ

10.1 भूमिका

अध्याय 9 में, आपने वृत्त के गुणों में से कुछ का अध्ययन किया है। यहाँ पर हम वृत्त की स्पर्श रेखा (स्पर्शी) को परिभाषित करेंगे तथा स्पर्शी के गुणों में से कुछ का अध्ययन करेंगे। उनमें से कुछ गुणों को क्रियाकलापों की सहायता से सत्यापित करेंगे तथा आवश्यकतानुसार कुछ की उपपत्ति भी देंगे।

आइए हम केंद्र O वाले एक वृत्त पर विचार करें। वृत्त के तल में कोई रेखा AB खींचिए। वृत्त के सापेक्ष यह रेखा तीन अवस्थाओं में हो सकती है, जैसा कि निम्न आकृति में दर्शाया गया है :

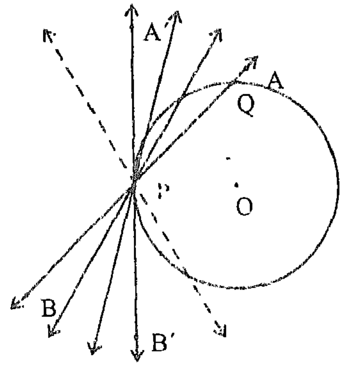


आकृति 10.1

आकृति 10.1(i) में, रेखा AB वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती है। आकृति 10.1(ii) में, रेखा AB वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है तथा यह वृत्त की छेदक *रेखा* (*secant*) कहलाती है। आकृति 10.1(iii) में, रेखा AB वृत्त को दो संपाती बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है अथवा यदि

भली प्रकार कहा जाए, तो केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है। इस स्थिति में, रेखा AB का वृत्त को *स्पर्श करना* कहते हैं। दूसरे शब्दों में, AB वृत्त के उस बिंदु पर एक *स्पर्श रेखा* (*tangent*) है। वृत्त के इस बिंदु को रेखा AB का *स्पर्श बिंदु* कहते हैं। इस धारणा की निम्न क्रियाकलाप द्वारा भी व्याख्या की जा सकती है :

एक वृत्ताकार तार लीजिए। वृत्ताकार तार के एक बिंदु P पर एक सीधा तार AB इस प्रकार जोड़िए कि तार AB तथा वृत्ताकार तार एक तल में हों। इसके लिए आप इन दोनों को एक क्षैतिज मेज पर रख सकते हैं। साधारण अवस्था में तार AB इस वृत्त को एक अन्य बिंदु Q पर काटेगा (आकृति 10.2)। अब तार AB को इस प्रकार घुमाना प्रारंभ कीजिए कि यह बिंदु Q, बिंदु P, जहाँ यह वृत्ताकार तार से जुड़ा हुआ है, के समीप तथा और समीप आता जाए।



आकृति 10.2

एक स्थिति, माना A′B′ में यह बिंदु, बिंदु P के संपाती हो जाता है। तब A′PB′ वृत्त को बिंदु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है। इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि

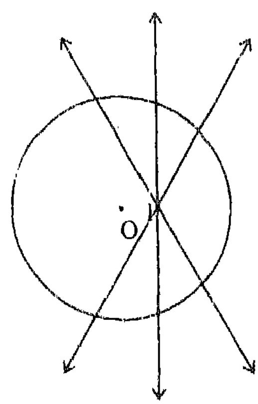
वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है, जो वृत्त को एक और केवल एक ही बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है।

यदि उपर्युक्त क्रिया में आप तार A′PB′ को और अधिक घुमाएँ, तो यह वृत्ताकार तार को बिंदु P के अतिरिक्त पुनः एक अन्य बिंदु पर काटेगा (आकृति 10.2)। अतः हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि :

वृत्त के एक बिंदु पर एक और केवल एक ही स्पर्श रेखा होती है।

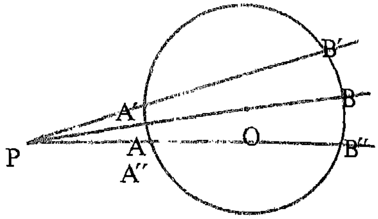
10.2 एक बिंदु से एक वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की संख्या

आइए हम एक बिंदु से एक वृत्त पर कितनी स्पर्श रेखाएँ खींच सकते हैं इसकी जाँच करें। स्वाभाविक रूप से यह संख्या वृत्त के सापेक्ष बिंदु की स्थिति पर निर्भर करती है। हमने उपर्युक्त अनुच्छेद में देखा कि यदि बिंदु वृत्त पर स्थित है, तो इस बिंदु से जाने वाली वृत्त की केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। यदि एक बिंदु P वृत्त के अंदर स्थित हो, तो इससे होकर जाने वाली कोई भी रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेगी (आकृति 10.3)। अतः



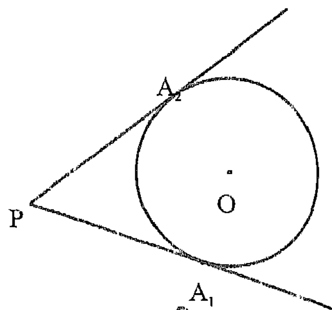
आकृति 10.3

वह स्पर्श रेखा नहीं हो सकती। अतः उस बिंदु से, जो वृत्त के अंदर स्थित हो, होकर जाने वाली वृत्त की कोई भी स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती। अंत में, हम उस स्थिति पर विचार करें जब बिंदु P वृत्त के बाहर स्थित हो। यदि आप इस बिंदु से होकर जाने वाली एक छेदक रेखा खींचें, तो यह वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेगी तथा वृत्त की एक जीवा को समाहित करेगी। इस जीवा की अधिकतम लंबाई वृत्त के व्यास के बराबर होगी। यदि छेदक रेखा इस व्यास के दोनों ओर खींची जाए, तो आप देखेंगे कि जीवा की लंबाई व्यास से कम होगी (आकृति 10.4)।



आकृति 10.4

यदि आप छेदक रेखा को बिंदु P के परितः व्यास के दोनों ओर घुमाएँ, तो आप देखेंगे कि जीवा की लंबाई कम तथा और कम होती जाएगी तथा प्रत्येक ओर एक स्थिति ऐसी आएगी कि जीवा छोटी होती–होती एक बिंदु बन जाएगी। दूसरे शब्दों में, छेदक रेखा एक स्पर्श रेखा हो जाएगी (आकृति 10.5)।



आकृति 10.5

अतः,

वृत्त के एक बाह्य बिंदु से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

इस विचार को हम निम्न सारणी में संक्षिप्त करते हैं :

सारणी 10.1

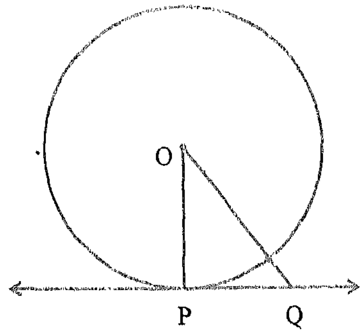
क्रमांक	वृत्त के सापेक्ष बिंदु की स्थिति	स्पर्श रेखाओं की संख्या
1.	अंदर	शून्य
2.	ऊपर	एक
3.	बाहर	दो

10.3 स्पर्श रेखाओं के गुण

अब हम वृत्त की स्पर्श रेखा के एक आवश्यक गुण, कि वह स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है, की तर्क द्वारा जाँच करते हैं। इसे निम्न प्रकार से सत्यापित किया जा सकता है :

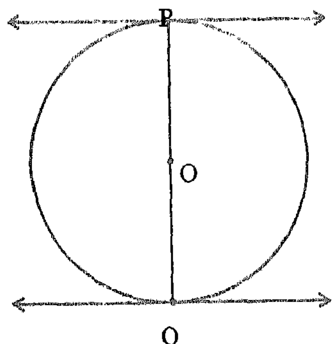
आइए, केंद्र O वाले एक वृत्त पर विचार करें तथा इस पर एक स्पर्श रेखा खींचें। माना स्पर्श

बिंदु P है। OP को मिलाएँ। माना स्पर्श रेखा पर P के अतिरिक्त एक अन्य बिंदु Q है। OQ को मिलाएँ। बिंदु Q वृत्त के अंदर (या उसके ऊपर) स्थित नहीं हो सकता है, क्योंकि तब रेखा PQ वृत्त को दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेदित करेगी और वह स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। अतः Q वृत्त के बाहर स्थित है (आकृति 10.6) तथा इस प्रकार OQ > OP। अतः O को स्पर्श रेखा के बिंदुओं से मिलाने वाले रेखाखंडों में से OP न्यूनतम है। क्योंकि किसी बिंदु से किसी रेखा पर बनाए गए रेखाखंडों में से लंब सबसे छोटा होता है, इसलिए OP, P पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लंब है। इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं :



आकृति 10.6

गुणधर्म 10.1 ; *वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।*

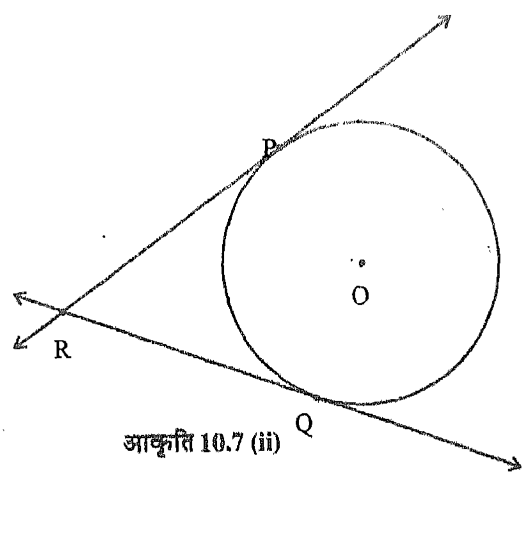


आकृति 10.7 (i)

गुणधर्म 10.1 का प्रयोग किसी वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचने में किया जा सकता है। मान लीजिए कि आपको केंद्र O वाले एक वृत्त के एक बिंदु P पर स्पर्श रेखा खींचनी है। तब आपको OP को मिलाना होगा तथा OP के बिंदु P पर लंब रेखा खींचनी होगी। यही अभीष्ट स्पर्श रेखा होगी।

यदि हम किसी वृत्त के दो बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ खींचते हैं, तो या तो वे समांतर होती हैं या वे एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं [आकृति 10.7(i), (ii)]। यदि स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं, तो उनके स्पर्श बिंदु एक व्यास के सिरे होंगे [आकृति 10.7(i)]।

यदि दो बिंदुओं P और Q पर खींची गई वृत्त की स्पर्श रेखाएँ R पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो रेखाखंडों RP और RQ की लंबाइयों को बिंदु R से वृत्त पर *स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ* कहते हैं [आकृति 10.7 (ii)]।



आकृति 10.7 (ii)

अब स्वाभाविक प्रश्न उठता है : लंबाइयों RP और RQ में क्या संबंध है? उत्तर का भली प्रकार अनुमान लगाया जा सकता है कि वे समान होंगी। इसे वास्तविक माप द्वारा या चित्र की सममिति का प्रयोग करके दर्शाया जा सकता है। इसे निम्न गुणधर्म के रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

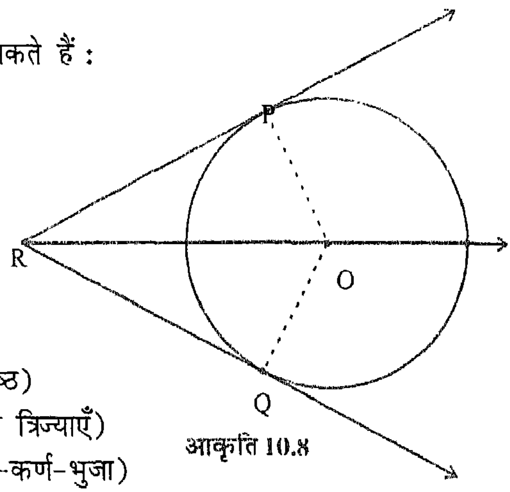
गुणधर्म 10.2 : *किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।*

गुणधर्म 10.2 को निम्न प्रकार से सिद्ध कर सकते हैं :

माना कि O केंद्र वाले एक वृत्त की RP तथा RQ दो स्पर्श रेखाएँ हैं (आकृति 10.8)। हमने गुणधर्म 10.1 में देखा कि

$$\angle OPR = \angle OQR = 90°$$

दो समकोण त्रिभुजों OPR तथा OQR में, हमें ज्ञात है कि



आकृति 10.8

कर्ण OR = कर्ण OR (उभयनिष्ठ)

OP = OQ (वृत्त की त्रिज्याएँ)

∴ $\Delta OPR \cong \Delta OQR$ (समकोण–कर्ण–भुजा)

∴ RP = RQ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

हम इस पर भी ध्यान देते हैं कि

$$\angle PRO = \angle QRO \quad \text{(सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)}$$

अतः, O कोण PRQ के समद्विभाजक पर स्थित है अथवा दूसरे शब्दों में,

वृत्त का केंद्र दो स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण के समद्विभाजक पर स्थित होता है।

यहाँ यह भी ध्यान देने योग्य है कि यदि आप कागज को रेखा RO के अनुदिश मोड़ें, तो आकृति 10.8 के भाग जो रेखा RO के दोनों ओर पड़ते हैं सर्वसमान (अर्थात् एक जैसे) हैं और इस प्रकार कहा जाता है कि आकृति रेखा RO के परितः सममित (symmetrical) है।

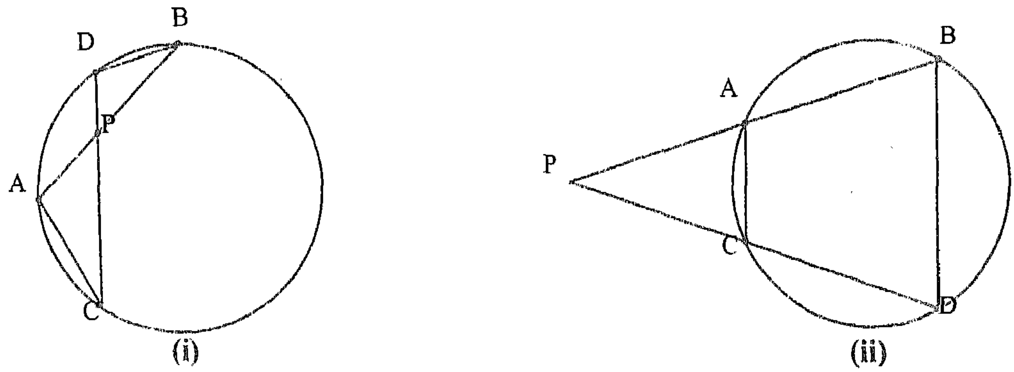
10.4 वृत्त की एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करने वाली जीवाएँ

इस अनुच्छेद में, हम एक बिंदु से होकर जाने वाली वृत्त की जीवाओं के एक आवश्यक गुण के बारे में चर्चा करेंगे। इस गुण का निम्न प्रमेय में कथन दिया गया है :

प्रमेय 10.1 : *यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ वृत्त के अंदर अथवा बाहर प्रतिच्छेद करती हैं, तो एक*

जीवा के भागों द्वारा बने आयत का क्षेत्रफल दूसरी जीवा के भागों द्वारा बने आयत के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

दिया है : एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD जो एक-दूसरे को बिंदु P पर, जो वृत्त के अंदर अथवा बाहर स्थित है, प्रतिच्छेद करती हैं [आकृति 10.9 (i) और (ii)]।



आकृति 10.9

सिद्ध करना है : PA . PB = PC . PD

रचना : AC तथा BD को मिलाइए।

उपपत्ति :

स्थिति 1 : बिंदु P वृत्त के अंदर स्थित है [आकृति 10.9 (i)]।

त्रिभुजों PCA तथा PBD में,

$\angle PCA = \angle PBD$ (एक ही वृत्तखंड के कोण)

$\angle APC = \angle BPD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\therefore$ $\Delta PCA \sim \Delta PBD$ (AA समरूपता)

स्थिति 2 : बिंदु P वृत्त के बाहर स्थित है [आकृति 10.9 (ii)]।

$\angle PAC + \angle CAB = 180°$ (रैखिक युग्म)

और $\angle CAB + \angle PDB = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

$\therefore$ $\angle PAC = \angle PDB$ (1)

अब त्रिभुजों PCA तथा PBD में,

$\angle PAC = \angle PDB$ [(1) से]

$\angle APC = \angle DPB$ (एक ही कोण)

$\therefore \qquad \Delta PCA \sim \Delta PBD$ (AA समरूपता)

अतः प्रत्येक स्थिति में,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \qquad \text{(समरूप त्रिभुजों का गुण)}$$

अथवा $\quad PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$

टिप्पणियाँ :

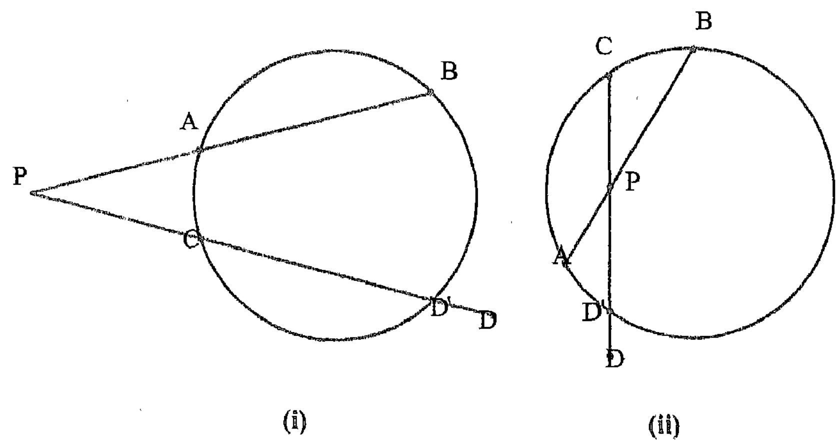
1. AD तथा BC को मिलाकर एक अन्य उपपत्ति भी दी जा सकती है।
2. यदि बिंदु P वृत्त के ऊपर स्थित है, अर्थात् P, A तथा C के संपाती है, तो $PA = PC = 0$ है। इस स्थिति में भी $PA \,.\, PB = 0 = PC \,.\, PD$ है।

आगे आइए हम इस प्रमेय के विलोम की सत्यता की जाँच करें। इसे निम्न प्रकार से कह सकते हैं :

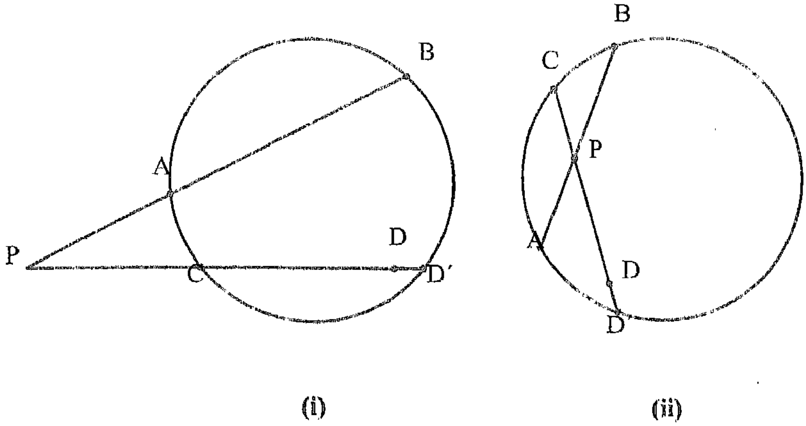
गुणधर्म 10.3: *यदि दो रेखाएँ AB तथा CD एक बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं अथवा AB तथा CD को समाहित करने वाली रेखाएँ P पर प्रतिच्छेद करती हैं, जबकि $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$ है, तो चारों बिंदु A, B, C, D एकवृत्तीय हैं, अर्थात् वे एक ही वृत्त पर स्थित हैं।*

इसे निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है :

तीन बिंदुओं A, B तथा C (एक रैखिक नहीं) से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए कि वह D से होकर नहीं जाता है। इसलिए वह CD को या बढ़ाई गई CD को एक बिंदु, माना, D′ पर प्रतिच्छेद करेगा (आकृति 10.10 तथा 10.11)।



आकृति 10.10



आकृति 10.11

तब वृत्त की जीवाएँ AB और CD′ बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। प्रमेय 10.1 का उपयोग करके, हम पाते हैं कि

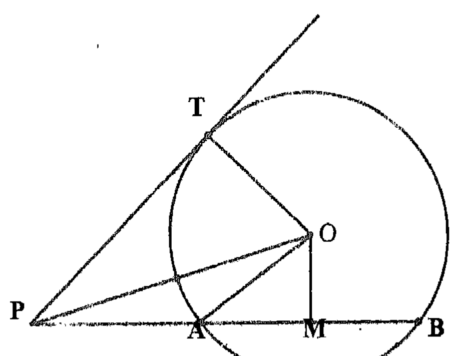
$$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD'$$

परंतु $$PA \,.\, PB = PC \,.\, PD \quad \text{(दिया है)}$$

अतः, PD = PD′। जब तक बिंदु D तथा D′ संपाती न हों, यह विरोधाभास को इंगित करता है। अतः, बिंदु D तथा D′ एक ही बिंदु हैं अथवा बिंदु A, B, C और D एकवृत्तीय हैं।

यदि किसी बाह्य बिंदु P से एक वृत्त पर अनेक छेदक रेखाएँ PA_1B_1, PA_2B_2, PA_3B_3 आदि खींची जाएँ, तो हमने प्रमेय 10.1 का उपयोग कर प्राप्त किया है कि $PA_1 \,.\, PB_1 = PA_2 \,.\, PB_2 = PA_3 \,.\, PB_3$ आदि। अगली प्रमेय दर्शाती है कि यह गुणनफल वास्तव में PT^2 के बराबर होता है, जहाँ PT वृत्त पर स्पर्शी है।

प्रमेय 10.2 : *यदि PAB किसी वृत्त की एक छेदक रेखा है जो इसे A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है तथा PT एक स्पर्श रेखा है, तो* $PA \,.\, PB = PT^2$ होगा।



आकृति 10.12

दिया है : केंद्र O वाले एक वृत्त की PAB एक छेदक रेखा है जो इसे A तथा B पर प्रतिच्छेद करती है तथा PT वृत्त की एक स्पर्श रेखा है।

सिद्ध करना है : $PA.PB = PT^2$

रचना : O को AB के मध्य-बिंदु M तथा A , P और T से मिलाइए (आकृति 10.12)।

उपपत्ति : $PA = PM - AM$

$PB = PM + MB$

$= PM + AM$ (क्योंकि $AM = MB$)

अतः, $PA.PB = (PM - AM)(PM + AM)$

$= PM^2 - AM^2$

अब OM, AB पर लंब है (गुणधर्म 9.6)।

अतः, $PM^2 = OP^2 - OM^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

तथा $AM^2 = OA^2 - OM^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

इस प्रकार, $PA.PB = (OP^2 - OM^2) - (OA^2 - OM^2)$

$= OP^2 - OA^2$

$= OP^2 - OT^2$ (क्योंकि OA = OT = वृत्त की त्रिज्या)

$= PT^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

टिप्पणियाँ :

1. प्रमेय 10.1 की विशेष स्थिति, जबकि P वृत्त के बाहर स्थित हो, को प्रमेय 10.2 से सिद्ध किया जा सकता है, क्योंकि तब $PA . PB = PT^2$ तथा $PC . PD = PT^2$ है, जिससे प्राप्त होता है $PA . PB = PC . PD$।

2. प्रमेय 10.2 को प्रमेय 10.1 की एक विशेष स्थिति के रूप में समझा जा सकता है, क्योंकि PT को एक ऐसी छेदक रेखा माना जा सकता है जो वृत्त को दो संपाती बिंदुओं T, T पर प्रतिच्छेद करती हो। इस प्रकार,

$$PA . PB = PT . PT = PT^2$$

3. गुणनफल PA.PB को कभी-कभी वृत्त के सापेक्ष बिंदु P की *क्षमता* (*power*) भी कहते हैं।

अब हम उपर्युक्त परिणामों से संबंधित कुछ उदाहरण लेते हैं।

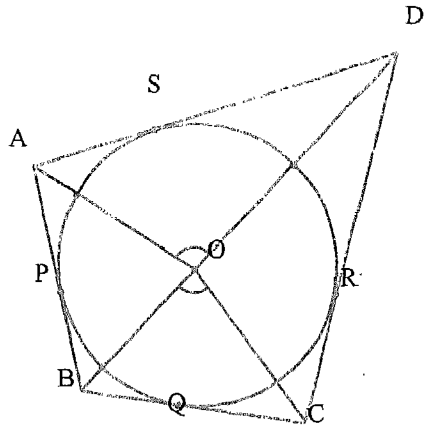
उदाहरण 1 : एक वृत्त एक चतुर्भुज ABCD की सभी भुजाओं को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए कि केंद्र पर सम्मुख भुजाओं द्वारा अंतरित कोण संपूरक हैं।

हल : मान लीजिए उस वृत्त का केंद्र, जो चतुर्भुज ABCD की सभी भुजाओं को बिंदुओं P, Q, R तथा S पर स्पर्श करता है, O है (आकृति 10.13)।

सिद्ध करना है :

$\angle AOD + \angle BOC = 180°$

और $\angle AOB + \angle COD = 180°$



आकृति 10.13

क्योंकि बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ AS तथा AP हैं, इसलिए O कोण SAP के समद्विभाजक पर स्थित है। दूसरे शब्दों में,

$$\angle BAO = \angle DAO = \frac{1}{2} \angle BAD।$$

इसी प्रकार, OB, OC तथा OD क्रमश: कोणों ABC, BCD तथा CDA के समद्विभाजक हैं। अब क्योंकि किसी त्रिभुज के कोणों का योग 180° होता है, अत:

$$\angle AOD + \angle BOC = 180° - (\angle DAO + \angle ADO) + 180° - (\angle CBO + \angle BCO)$$

$$= 360° - \frac{1}{2} (\angle BAD + \angle ADC + \angle ABC + \angle BCD)$$

$$= 360° - \frac{1}{2} \times 360° \quad \text{(चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है)}$$

$$= 360° - 180°$$

$$= 180°$$

अंत में, $\angle AOB + \angle COD = 360° - (\angle AOD + \angle BOC)$

$$= 360° - 180°$$

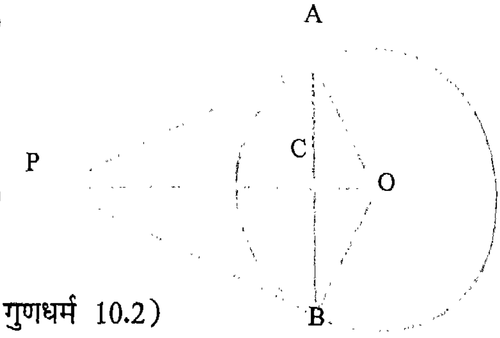
$$= 180°$$

उदाहरण 2 : यदि एक बिंदु P से केंद्र O वाले एक वृत्त पर PA तथा PB दो स्पर्श रेखाएँ खींची गई हों, जो वृत्त को A तथा B पर स्पर्श करती हों, तो सिद्ध कीजिए कि OP, AB का लंब समद्विभाजक है।

हल : मान लीजिए AB को OP एक बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती है (आकृति 10.14)। हमें सिद्ध करना है

AC = CB तथा $\angle ACP = \angle BCP = 90°$।

यहाँ एक बिंदु P से PA तथा PB केंद्र O वाले एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।



आकृति 10.14

इसलिए, $\angle APO = \angle BPO$

(O कोण APB के समद्विभाजक पर स्थित है)

अब त्रिभुजों ACP तथा BCP में,

$AP = BP$ (गुणधर्म 10.2)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

तथा $\angle APO = \angle BPO$

अतः, $\Delta ACP \cong \Delta BCP$ (भुजा-कोण-भुजा)

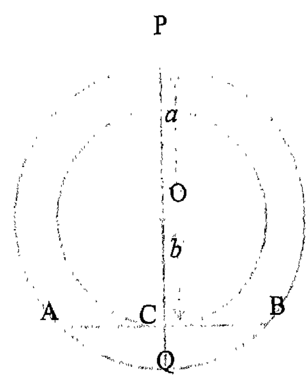
इससे प्राप्त होता है $AC = CB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

तथा $\angle ACP = \angle BCP = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत कोण)

अतः OP, AB का लंब समद्विभाजक है।

त्रिज्याओं a तथा b, जहाँ $a > b$ है, वाले दिए हुए दो संकेंद्री वृत्तों के लिए बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए, जो दूसरे वृत्त को स्पर्श करती हो।

मान लीजिए त्रिज्या a वाले वृत्त की एक जीवा AB है, जो दूसरे वृत्त को एक बिंदु C पर स्पर्श करती है। मान लीजिए O उभयनिष्ठ केंद्र है। छोटे वृत्त की त्रिज्या OC खींचिए तथा OC को समाहित करने वाला बड़े वृत्त का व्यास PQ खींचिए (आकृति 10.15)। गुणधर्म 10.1 से, OC तथा इसीलिए PQ, AB का लंब समद्विभाजक है।



आकृति 10.15

मान लीजिए $AC = CB = x$ है।

प्रमेय 10.1 से,

$$AC \,.\, CB = PC \,.\, CQ$$

या $$x \,.\, x = (a+b)\,.\,(a-b)$$

या $$x^2 = a^2 - b^2$$

या $\qquad x = \sqrt{a^2 - b^2}$

अतः, जीवा $AB = 2x = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ है।

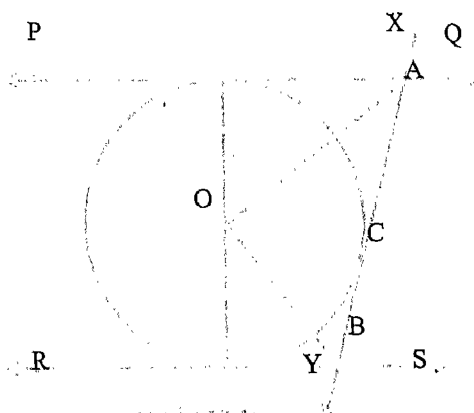
1. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की दो समांतर स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड वृत्त का व्यास होता है।

2. 3 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केंद्र से 5 सेमी दूर स्थित एक बिंदु से स्पर्श रेखा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

3. एक वृत्त को बाह्य स्पर्श करता हुआ एक चतुर्भुज ABCD है। सिद्ध कीजिए कि AB + CD = AD + BC है।

4. सिद्ध कीजिए कि एक वृत्त पर एक बाह्य बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

5. आकृति 10.16 में, PQ और RS केंद्र O वाले एक वृत्त की दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं तथा स्पर्श बिंदु C वाली एक अन्य स्पर्श रेखा XY, PQ को A पर तथा RS को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$ है। [**संकेत :** OC को मिलाइए।]



6. एक दी हुई रेखा को एक दिए हुए बिंदु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के केंद्रों का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए।

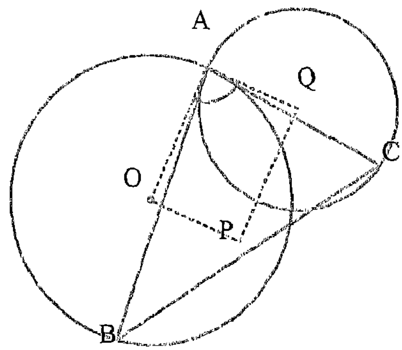
7. दो संकेंद्री वृत्तों में सिद्ध कीजिए कि बाह्य वृत्त की वे सभी जीवाएँ, जो आंतरिक वृत्त को स्पर्श करती हैं, समान लंबाई की होती हैं।

8. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त की एक जीवा के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ जीवा से समान कोण बनाती हैं।

9. उन वृत्तों के केंद्रों का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो दो प्रतिच्छेदी रेखाओं को स्पर्श करते हों।

10. मान लीजिए केंद्र O तथा Q वाले दो वृत्तों का एक प्रतिच्छेद बिंदु A है। दोनों वृत्तों की बिंदु A पर स्पर्श रेखाएँ वृत्तों को क्रमशः फिर से B तथा C पर मिलती हैं। मान लीजिए बिंदु P इस प्रकार खोजा गया है कि AOPQ एक समांतर चतुर्भुज है। सिद्ध कीजिए कि P त्रिभुज ABC का परिकेंद्र है (आकृति 10.17)।

[**संकेत :** $AQ \perp AB$ तथा $AQ \parallel OP$ है। तब $OP \perp AB$ है तथा AB का समद्विभाजक भी है। इसी प्रकार, PQ, AC का लंब समद्विभाजक है।]



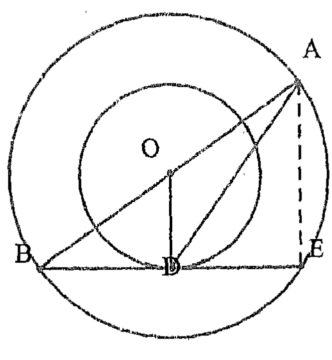
आकृति 10.17

11. एक त्रिभुज के अंतर्वृत्त की त्रिज्या 4 सेमी है तथा स्पर्श बिंदु द्वारा एक भुजा के विभाजित होने से प्राप्त रेखाखंड 6 सेमी तथा 8 सेमी हैं। त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** त्रिभुज के क्षेत्रफल सूत्र $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ द्वारा तथा उसे तीन त्रिभुजों में बाँटकर अलग-अलग ज्ञात करके उन्हें बराबर कर लीजिए।]

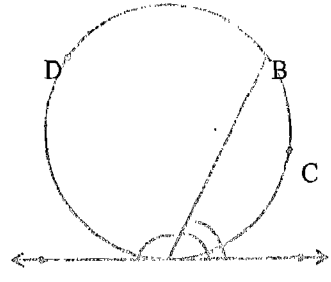
12. दो संकेंद्री वृत्तों की त्रिज्याएँ 13 सेमी तथा 8 सेमी हैं। बड़े वृत्त का एक व्यास AB है। BD छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है जो इसे D पर स्पर्श करती है। AD की लंबाई ज्ञात कीजिए (आकृति 10.18)।

[**संकेत :** मान लीजिए रेखा BD बड़े वृत्त को E पर प्रतिच्छेद करती है। AE को मिलाइए।
AE = 2 × 8 = 16 सेमी। DE = BD
$= \sqrt{(169-64)} = \sqrt{105}$ तथा $\angle AED = 90°$।]



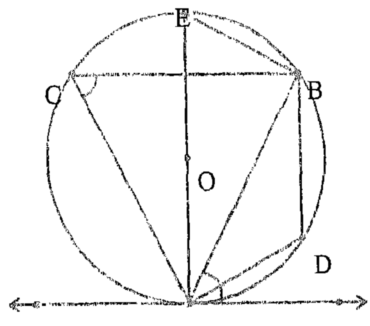
आकृति 10.18

10.5 एकांतर वृत्तखंड और उनके कोण



आकृति 10.19

एक वृत्त तथा वृत्त की एक जीवा AB दी गई है। यदि वृत्त की एक स्पर्श रेखा XAY खींची जाए, तो जीवा AB स्पर्श रेखा से दो कोण BAY तथा BAX बनाती है। AB वृत्त (वास्तव में, वृत्तीय क्षेत्र) को भी दो खंडों ADB तथा ACB में बाँटती है (आकृति 10.19)। वृत्तखंडों ADB तथा ACB को कोणों BAY तथा BAX के क्रमश: *एकांतर वृत्तखंड* (*alternate segments*) कहते हैं। निम्नलिखित प्रमेय उन कोणों जो एक जीवा एक सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखा से बनाती है तथा जीवा द्वारा एकांतर वृत्तखंडों में बनाए गए कोणों में संबंध स्थापित करती है।



आकृति 10.20

प्रमेय 10.3 : *यदि एक रेखा एक वृत्त को स्पर्श करती है तथा स्पर्श बिंदु से एक जीवा खींची जाती है, तो वे कोण, जो यह जीवा दी गई रेखा से बनाती है, क्रमश: संगत एकांतर वृत्तखंडों में बने कोणों के बराबर होते हैं।*

दिया है : O केंद्र वाले वृत्त के बिंदु A पर एक स्पर्श रेखा PQ है। AB एक जीवा है तथा जीवा AB द्वारा बाँटने वाले दो वृत्तखंडों में बिंदु C और D हैं (आकृति 10.20)।

सिद्ध करना है :

$$\angle BAQ = \angle ACB$$

तथा $\angle BAP = \angle ADB$

रचना : व्यास AOE खींचिए तथा EB को मिलाइए।

उपपत्ति : त्रिभुज AEB में,

$\angle ABE = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण)

अत:, $\angle AEB + \angle EAB = 90°$ (1)

अब क्योंकि $EA \perp PQ$ है, (व्यास तथा स्पर्श रेखा)

$\therefore \quad \angle EAB + \angle BAQ = \angle EAQ = 90°$ (2)

(1) तथा (2) से, हम पाते हैं,

$$\angle AEB = \angle BAQ$$

प्रमेय 9.3 से,

$$\angle ACB = \angle AEB$$

अतः, $\angle BAQ = \angle ACB$ (3)

पुनः, $\angle BAQ + \angle BAP = 180°$ (रैखिक युग्म)

तथा $\angle ACB + \angle ADB = 180°$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

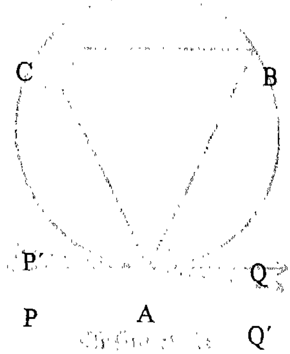
अतः, $\angle BAQ + \angle BAP = \angle ACB + \angle ADB$

(3) का प्रयोग कर, हमें प्राप्त होता है :

$$\angle BAP = \angle ADB$$

उपर्युक्त प्रमेय का विलोम भी सत्य है। हम इसे अगली प्रमेय में सिद्ध करते हैं।

यदि किसी वृत्त की एक जीवा के एक सिरे पर एक ऐसी रेखा खींची जाती है कि जीवा का इस रेखा के साथ बना एक कोण जीवा द्वारा एकांतर वृत्तखंड में बनाए गए कोण के बराबर हो, तो रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।



किसी वृत्त की AB एक जीवा है तथा एक रेखा PAQ इस प्रकार है कि $\angle BAQ = \angle ACB$ है, जहाँ C एकांतर वृत्तखंड में कोई बिंदु है (आकृति 10.21)।

रेखा PAQ वृत्त की स्पर्श रेखा है।

यदि PAQ स्पर्श रेखा नहीं हो, तो A पर स्पर्श रेखा P′AQ′ खींचिए।

क्योंकि P′AQ′ एक स्पर्श रेखा है तथा AB वृत्त की एक जीवा है, इसलिए प्रमेय 10.3 से,

$$\angle BAQ' = \angle ACB$$

परंतु $\angle BAQ = \angle ACB$ (दिया है)

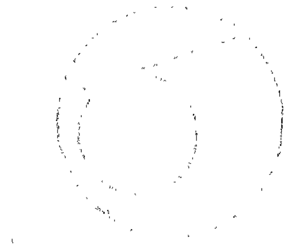
अतः, $\angle BAQ' = \angle BAQ$

इसलिए AQ′, AQ के संपाती है या दूसरे शब्दों में, P′AQ′, PAQ के संपाती है। अर्थात् PAQ वृत्त की A पर स्पर्श रेखा है।

प्रमेय 10.4 को एक वृत्त के केंद्र ज्ञात न होने की अवस्था में एक बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचने में प्रयोग किया जा सकता है।

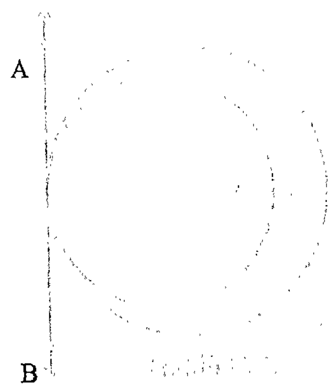
यदि एक रेखा दो वृत्तों को स्पर्श करती है, तो उसे वृत्तों की *उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा* कहते हैं। अब हम इसकी जाँच करेंगे कि दो दिए गए वृत्तों की भिन्न-भिन्न स्थितियों में कितनी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

जब एक वृत्त एक अन्य वृत्त के पूर्ण रूप से अंदर (बिना किसी उभयनिष्ठ बिंदु के) स्थित है (आकृति 10.22)।

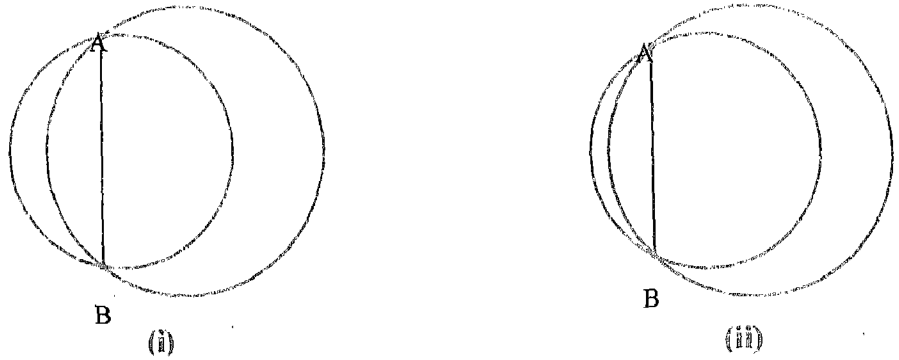


यदि अंदर के वृत्त के किसी बिंदु पर कोई स्पर्श रेखा खींची जाए, तो वह बाह्य वृत्त को दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करेगी और इस प्रकार वह बाह्य वृत्त पर स्पर्श रेखा नहीं हो सकती है। अतः, इस स्थिति में कोई भी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती है।

जब वृत्त अंतःस्पर्श करते हों।



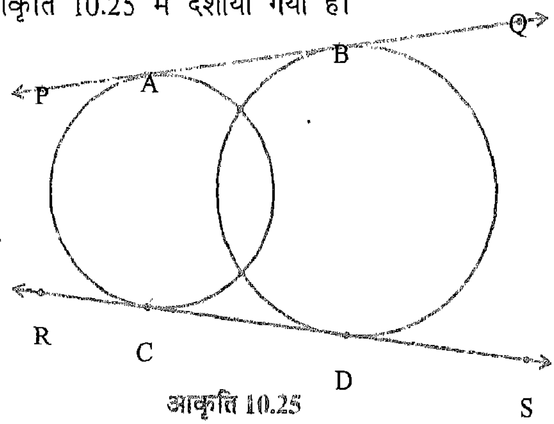
हम दो वृत्तों को स्पर्श करना तब कहते हैं जब उन दोनों वृत्तों में केवल एक उभयनिष्ठ बिंदु हो। इस स्थिति में, दोनों वृत्तों की केवल एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है जैसा कि आकृति 10.23 में दिखाया गया है। इस यथार्थ की निम्न प्रकार से व्याख्या की जा सकती है। उभयनिष्ठ जीवा AB वाले दो परस्पर प्रतिच्छेद करने वाले असमान वृत्त लीजिए जैसा कि आकृति 10.24 (i) में दर्शाया गया है। अब छोटे वृत्त को दाईं ओर इस प्रकार सरकाते हैं कि जीवा AB छोटी होती जाए [आकृति 10.24(ii)] तथा एक स्थिति में इसकी लंबाई शून्य हो जाएगी, अर्थात् दोनों बिंदु A, B संपाती हो जाएँगे। इस स्थिति में, रेखा AB दोनों वृत्तों पर स्पर्श रेखा हो जाएगी। अतः, दो अंतःस्पर्श करने वाले वृत्तों के स्पर्श बिंदु पर केवल एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा होगी। इसी प्रकार, छोटे वृत्त (या समान वृत्त) को बाईं ओर विस्थापित करने पर हम बाह्य स्पर्श करते हुए दो वृत्त प्राप्त करते हैं, जिनमें एक अकेली रेखा वृत्तों के स्पर्श बिंदु पर दोनों वृत्तों को स्पर्श करती है।



आकृति 10.24

स्थिति 3 : जब वृत्त दो बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हों।

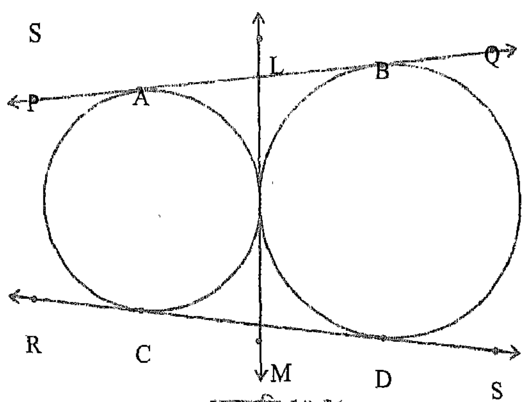
इस स्थिति में, दोनों वृत्तों की दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ PQ तथा RS होंगी, जैसा कि आकृति 10.25 में दर्शाया गया है।



आकृति 10.25

स्थिति 4 : जब वृत्त बाह्य स्पर्श करते हों।

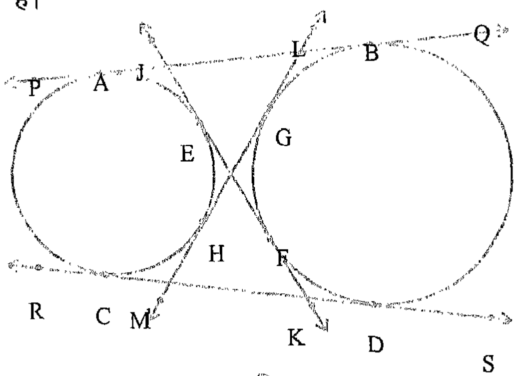
यहाँ दोनों वृत्तों की तीन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ LM, PQ तथा RS होंगी, जैसा कि आकृति 10.26 में दिखाया गया है।



आकृति 10.26

स्थिति 5 : *जब एक वृत्त दूसरे वृत्त के पूर्णतः बाहर स्थित हो और उनमें कोई उभयनिष्ठ बिंदु न हो।*

इस स्थिति में, चार उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ PQ, RS, JK तथा LM होंगी, जैसा कि आकृति 10.27 में दर्शाया गया है।



आकृति 10.27

टिप्पणी : स्थितियों 3, 4 तथा 5 में उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखंड AB तथा CD बराबर होते हैं तथा स्थिति 5 में उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाखंड EF तथा GH बराबर होते हैं।

इन धारणाओं को हम संक्षेप में निम्न सारणी के रूप में लिख सकते हैं :

सारणी 10.2

क्रमांक	दो वृत्तों की स्थिति	उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं की संख्या
1.	एक वृत्त दूसरे वृत्त के पूर्णतः अंदर स्थित है	शून्य
2.	दोनों वृत्त अंतःस्पर्श करते हों	एक
3.	दोनों वृत्त दो भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करते हों	दो
4.	दोनों वृत्त बाह्य स्पर्श करते हों	तीन
5.	एक वृत्त दूसरे वृत्त के पूर्णतः बाहर स्थित हो	चार

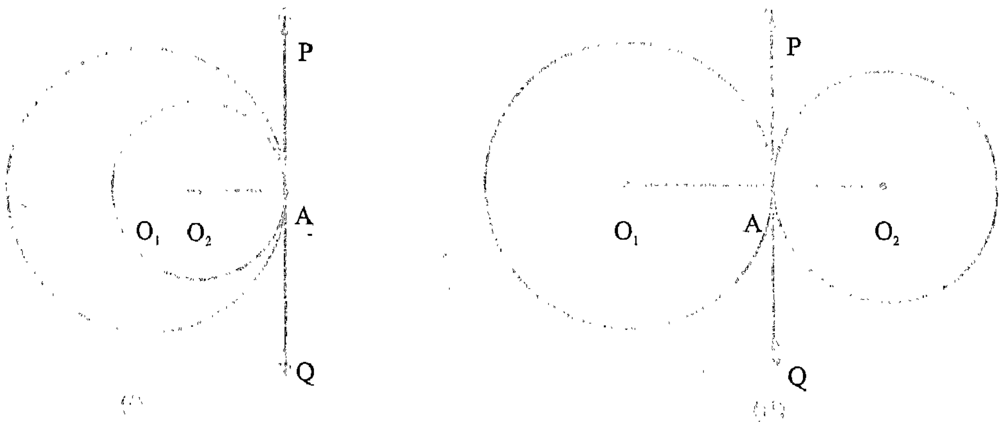
निम्न प्रमेय दो वृत्तों के स्पर्श करने के गुण के बारे में है :

यदि दो वृत्त एक-दूसरे को अंतः अथवा बाह्यतः स्पर्श करते हों, तो स्पर्श बिंदु उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है।

केंद्रों O_1 तथा O_2 वाले दो वृत्त जो एक-दूसरे को अंतः अथवा बाह्यतः बिंदु A पर स्पर्श करते हैं।

बिंदु A रेखा O_1O_2 पर स्थित है, अर्थात् तीनों बिंदु A, O_1 तथा O_2 सरेख हैं।

स्पर्श बिंदु A पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा PQ खींचिए [आकृति 10.28 (i) तथा (ii)]।



आकृति 10.28

आकृति 10.28 (i) में,

$\angle PAO_2 = \angle PAO_1 = 90°$ (PA दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखा है)

अतः, O_1, O_2 तथा A सरेख हैं।

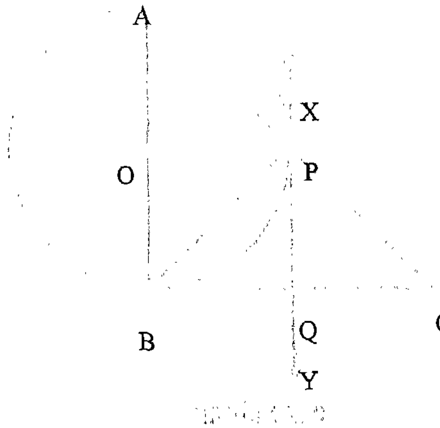
आकृति 10.28 (ii) में,

$\angle PAO_2 = \angle PAO_1 = 90°$ (PA दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखा है)

$\therefore$ $\angle PAO_1 + \angle PAO_2 = 90° + 90° = 180°$

अतः, O_1, A तथा O_2 सरेख हैं, क्योंकि $\angle PAO_1$ तथा $\angle PAO_2$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

दिए गए एक समकोण त्रिभुज ABC में AB को व्यास मानकर एक वृत्त खींचा गया है, जो कर्ण AC को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। दर्शाइए कि बिंदु P पर वृत्त की स्पर्श रेखा भुजा BC को समद्विभाजित करती है।



मान लीजिए AB को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा XY, BC को Q पर प्रतिच्छेद करती है (आकृति 10.29)। सिद्ध करना है कि BQ = QC है।

BP को मिलाइए। तब क्योंकि

$\angle APB = 90°$ (अर्धवृत्त का कोण), इसलिए BP, AC पर लंब है।

बिंदु Q से वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ QP तथा QB खींची हुई हैं,

अत:, $QB = QP$ (1)

पुन:, PQ स्पर्श रेखा है तथा PB वृत्त की एक जीवा है।

इसलिए प्रमेय 10.3 से,

$$\angle BPQ = \angle BAC \quad (2)$$

साथ ही, $\angle BPQ + \angle QPC = 90°$ $(BP \perp AC)$

तथा $\angle BAC + \angle BCA = 90°$ (ABC समकोण त्रिभुज है)

$\therefore$ $\angle BPQ + \angle QPC = \angle BAC + \angle BCA$

(2) का प्रयोग करके, हम प्राप्त करते हैं :

$$\angle QPC = \angle BCA = \angle QCP$$

अत:, Δ QCP एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें

$$QP = QC$$

है। (3)

(1) तथा (3) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$BQ = QC$$

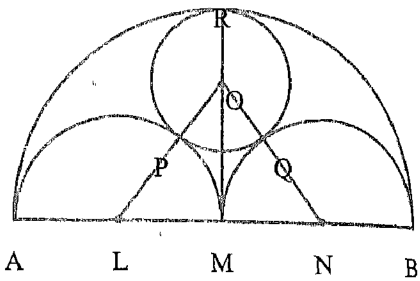
AB एक रेखाखंड है तथा M इसका मध्य-बिंदु है। AM, MB तथा AB को व्यास

मानकर रेखा AB के एक ही ओर अर्धवृत्त खींचे गए हैं। एक वृत्त तीनों अर्धवृत्तों को स्पर्श करते हुए खींचा गया है। सिद्ध कीजिए कि उसकी त्रिज्या

$$r = \frac{1}{6}\text{ AB}$$

है।

हल : माना रेखाखंडों AM, MB के मध्य-बिंदु क्रमशः L, N हैं तथा तीनों अर्धवृत्तों को स्पर्श करने वाले वृत्त का केंद्र O है। OL, OM तथा ON को मिलाइए। मान लीजिए केंद्र O वाला वृत्त अर्धवृत्तों को बिंदुओं P, Q तथा R पर स्पर्श करता है (आकृति 10.30)। प्रमेय 10.5 का प्रयोग कर, हम देखते हैं कि बिंदु O, P, L; बिंदु R, O, M तथा बिंदु O, Q, N क्रमशः संरेख हैं। मान लीजिए AB = a है। तब



आकृति 10.30

$$\text{PL} = \text{QN} = \frac{1}{4}a$$

अतः, $\text{OL} = r + \frac{1}{4}a = \text{ON}$ है। इससे प्राप्त होता है कि ΔOLN समद्विबाहु त्रिभुज है। क्योंकि M, LN का मध्य-बिंदु भी है, इसलिए

$$\text{OM} \perp \text{LN}$$

अब $$\text{OM} = \text{MR} - \text{OR} = \frac{1}{2}a - r$$

और $$\text{OL}^2 = \text{OM}^2 + \text{LM}^2 \qquad \text{(पाइथागोरस प्रमेय से)}$$

$$\therefore \quad \left(r + \frac{1}{4}a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a - r\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2$$

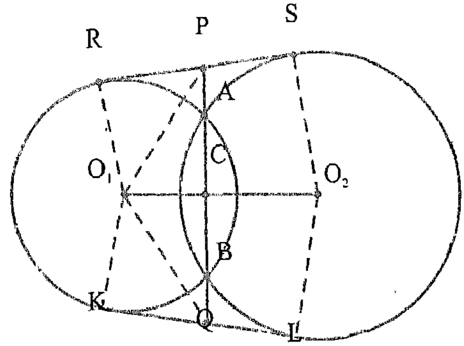
या $$r^2 + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{16}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - ar + r^2 + \frac{1}{16}a^2$$

या $$\frac{3}{2}ar = \frac{1}{4}a^2$$

या $$r = \frac{1}{6}a = \frac{1}{6}\text{ AB}$$

उदाहरण 6 : यदि दो वृत्त दो भिन्न बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा रेखा AB उनकी दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं को बिंदु P तथा Q पर प्रतिच्छेद करती है, तो सिद्ध कीजिए कि PA = QB है।

हल : मान लीजिए वृत्तों के केंद्र O_1 तथा O_2 हैं तथा उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ RS और KL हैं। मान लीजिए O_1O_2, AB को C पर प्रतिच्छेद करती है। O_1R, O_1P, O_1K तथा O_1Q को मिलाइए (आकृति 10.31)।



आकृति 10.31

प्रमेय 10.2 से,

$$PA \cdot PB = PS^2 = PR^2$$

इसलिए, $PS = PR$

इसी प्रकार, $QK = QL$

अतः, P और Q क्रमशः RS और KL के मध्य-बिंदु हैं।

क्योंकि $RS = KL$ है,

इसलिए $PR = KQ$ होगा।

त्रिभुजों O_1RP तथा O_1KQ में, हम प्राप्त करते हैं :

$$PR = KQ$$

$\angle O_1RP = \angle O_1KQ$ (प्रत्येक 90° के बराबर है)

$O_1R = O_1K$ (एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\therefore$ $\Delta O_1RP \cong \Delta O_1KQ$ (भुजा-कोण-भुजा)

अतः, $O_1P = O_1Q$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इस प्रकार, ΔO_1PQ समद्विबाहु त्रिभुज है। हम यह भी जानते हैं कि O_1O_2, AB का लंब समद्विभाजक होता है। अतः, यह PQ का भी लंब समद्विभाजक है।

अतः, $CP = CQ$

CA = CB का प्रयोग करके, हमें प्राप्त होता है :

$$PA = QB$$

त्रिज्याओं a तथा b के दो वृत्त बाह्यत: स्पर्श करते हैं। मान लीजिए c उस वृत्त की त्रिज्या है जो इन दोनों वृत्तों को स्पर्श करता है तथा दोनों वृत्तों की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा को स्पर्श करता है। सिद्ध कीजिए :

$$\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$$

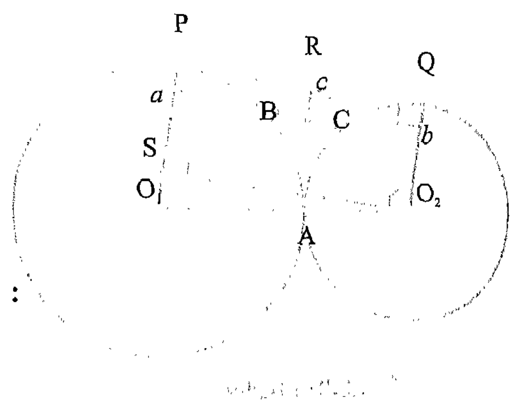
मान लीजिए दोनों वृत्त बाह्यत: बिंदु A पर स्पर्श करते हैं तथा उनके केंद्र O_1 तथा O_2 हैं। मान लीजिए PQ एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है तथा त्रिज्या c का वृत्त दोनों वृत्तों को क्रमश: B और C तथा स्पर्श रेखा PQ को R पर स्पर्श करता है। मान लीजिए $a > b$ है (आकृति 10.32)।

O_1P पर O_2S लंब खींचिए। तब PQO_2S एक आयत है तथा

$$PQ = O_2S = \sqrt{(O_1O_2)^2-(O_1S)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2}$$

$$= 2\sqrt{ab}$$



इसी प्रकार, $PR = 2\sqrt{ac}$, $RQ = 2\sqrt{bc}$ है।

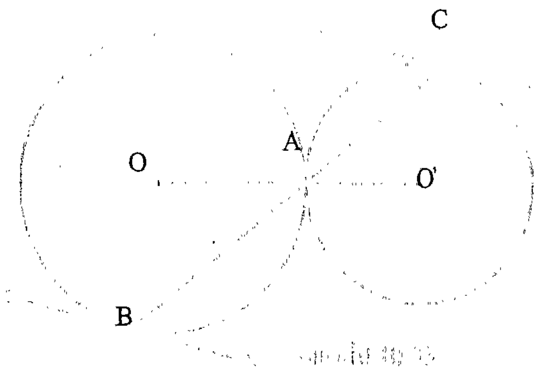
अब $PQ = PR + RQ$ है, जिससे प्राप्त होता है :

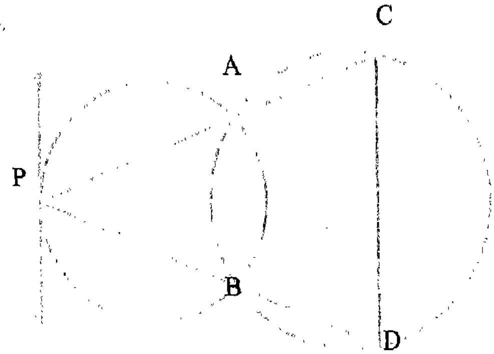
$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}$$

या $$\frac{1}{\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\text{।}$$

1. अचर त्रिज्या (r) वाले उस वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जो त्रिज्या r_1 वाले एक दिए हुए वृत्त को (i) बाह्यत: स्पर्श करे (ii) आंतरिक रूप से स्पर्श करे, जबकि $r_1 > r$ हो।

2. आकृति 10.33 में, केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्त एक बिंदु A पर बाह्यत: स्पर्श करते हैं। A से जाने वाली एक रेखा इन वृत्तों को B तथा C पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि B और C पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।
[**संकेत** : सिद्ध कीजिए कि $\angle OBA = \angle O'CA$]





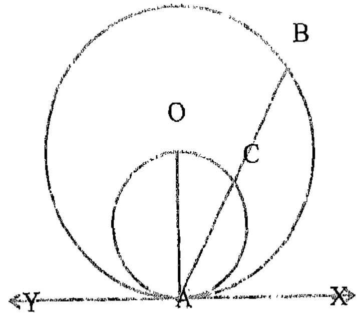
3. दो वृत्त दो बिंदुओं A और B पर प्रतिच्छेद करते हैं। एक वृत्त के एक बिंदु P से रेखाखंड PAC तथा PBD ऐसे खींचे गए हैं कि वे दूसरे वृत्त को बिंदुओं C तथा D पर प्रतिच्छेद करते हैं (आकृति 10.34)। सिद्ध कीजिए कि CD, P पर स्पर्श रेखा के समांतर है।

4. केंद्रों O और O′ वाले दो वृत्त एक बिंदु P पर अंतः स्पर्श करते हैं। P से जाने वाली एक रेखा दोनों वृत्तों को क्रमशः Q और R पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $OQ \parallel O'R$ है।

5. दो वृत्त एक बिंदु P पर बाह्यतः स्पर्श करते हैं। P पर खींची गई स्पर्श रेखा के एक बिंदु T से वृत्तों पर स्पर्श रेखाएँ TQ तथा TR खींची जाती हैं, जहाँ Q, R क्रमशः स्पर्श बिंदु हैं। सिद्ध कीजिए कि $TQ = TR$ है।

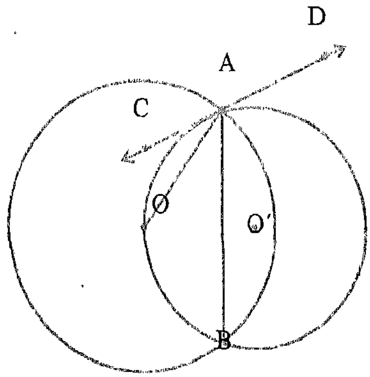
6. किसी वृत्त का एक व्यास AB तथा एक जीवा AC ऐसी है कि $\angle BAC = 30°$ है। C पर स्पर्श रेखा AB को बढ़ाने पर बिंदु D पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $BC = BD$ है।

7. केंद्र O वाला एक वृत्त दिया है। एक दूसरा वृत्त दिए गए वृत्त को बिंदु A पर स्पर्श करते हुए तथा O से जाते हुए खींचा जाता है। बड़े वृत्त की एक जीवा AB दूसरे वृत्त को C पर काटती है (आकृति 10.35)। सिद्ध कीजिए कि $AC = CB$ है।
[**संकेत :** OC को मिलाइए।]



आकृति 10.35

8. आकृति 10.36 में, केंद्र O′ वाला एक वृत्त केंद्र O वाले एक अन्य वृत्त को A तथा B पर प्रतिच्छेद करता हुआ उसके केंद्र O से होकर जाता है। A पर केंद्र O′ वाले वृत्त की स्पर्श रेखा CD खींची जाती है। सिद्ध कीजिए कि OA, $\angle CAB$ का समद्विभाजक है।

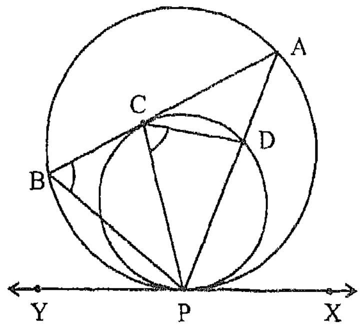


आकृति 10.36

9. दो किरणें ABP तथा ACQ दो समांतर रेखाओं द्वारा B,C तथा P,Q पर क्रमश: प्रतिच्छेदित होती हैं। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजों ABC तथा APQ के परिवृत्त एक-दूसरे को A पर स्पर्श करते हैं। [**संकेत :** त्रिभुज APQ के परिवृत्त पर स्पर्श रेखा XAY खींचिए तथा दर्शाइए कि $\angle XAP = \angle PQA = \angle BCA$ है।]

10. आकृति 10.37 में, दो वृत्त एक बिंदु P पर अंत: स्पर्श करते हैं। बड़े वृत्त की एक जीवा AB है, जो दूसरे वृत्त को C पर स्पर्श करती है। सिद्ध कीजिए कि PC कोण APB को समद्विभाजित करती है।

[**संकेत :** P पर एक स्पर्श रेखा खींचिए। CD को मिलाइए जहाँ D, AP तथा अंदर वाले वृत्त का प्रतिच्छेदन बिंदु है तथा सिद्ध कीजिए कि $\angle PBC = \angle PCD$ है]



आकृति 10.37

11. दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिंदुओं A तथा B पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिंदु A पर दोनों वृत्तों की स्पर्श रेखाएँ AP तथा AQ खींची जाती हैं, जो अन्य वृत्तों को क्रमश: बिंदुओं P तथा Q पर प्रतिच्छेदित करती हैं। सिद्ध कीजिए कि AB कोण PBQ का समद्विभाजक है।

12. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण E पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि Δ ADE तथा Δ BCE के परिवृत्त एक-दूसरे को बिंदु E पर स्पर्श करते हैं।

13. प्रमेय 10.3 तथा त्रिभुजों की समरूपता का प्रयोग करके, प्रमेय 10.2 की उपपत्ति दीजिए।

अध्याय 11

ज्यामितीय रचनाएँ

11.1 भूमिका

कक्षा IX में, आपने पढ़ा है कि दिए हुए मापों के त्रिभुज की रचना कैसे की जाती है तथा कैसे एक बहुभुज के क्षेत्रफल के बराबर एक त्रिभुज की रचना की जाती है। इस अध्याय में, हम उन रचनाओं के विषय में चर्चा करेंगे जिनमें वृत्त का समावेश हो और कुछ ऐसी आकृतियों की रचना भी करेंगे जो दी गई आकृतियों के समरूप हों।

11.2 किसी वृत्त की स्पर्श रेखा की रचना

हम पहले से ही जानते हैं कि ज्यामितीय रचनाओं में केवल दो ज्यामितीय उपकरण यथा एक पटरी (ruler) तथा परकार (compasses) का ही उपयोग करते हैं। क्योंकि वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा उस बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है, इसलिए वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींचना सरल है। हमें केवल संगत त्रिज्या खींचनी होती है तथा उस बिंदु पर इसके लंब रेखा बनानी होती है। यहाँ पर स्पर्श रेखा खींचने में हमने वृत्त के केंद्र का प्रयोग किया है। यद्यपि, यदि हम वृत्त के केंद्र का प्रयोग न भी करें, तो भी वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा खींच सकते हैं। इसको निम्न रचना में दिया गया है।

रचना 11.1 : *एक वृत्त के एक बिंदु पर बिना वृत्त के केंद्र का प्रयोग किए स्पर्श रेखा खींचना।*

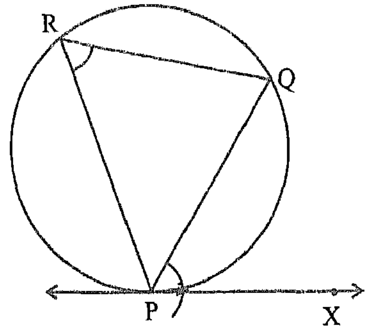
दिया है : एक वृत्त तथा उस पर एक बिंदु P।

अभीष्ट : P पर बिना वृत्त के केंद्र का प्रयोग किए स्पर्श रेखा खींचना।

रचना के चरण :

1. P से होकर जाने वाली वृत्त की एक जीवा PQ खींचिए (आकृति 11.1)।
2. दीर्घ चाप PQ पर एक बिंदु R लीजिए। PR और QR को मिलाइए।

3. ∠PRQ के बराबर ∠QPX बनाइए।
 तब PX बिंदु P पर अभीष्ट स्पर्श रेखा है (आकृति 11.1)।



आकृति 11.1

इसकी जाँच हम प्रमेय 10.4 के प्रयोग से कर सकते हैं।

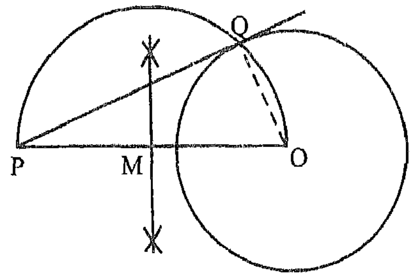
रचना 11.2 : *किसी वृत्त पर एक बाह्य बिंदु से, वृत्त के केंद्र का प्रयोग कर, स्पर्श रेखा खींचना।*

दिया है : केंद्र O वाला एक वृत्त तथा इसके बाहर एक बिंदु P।

अभीष्ट : P से वृत्त पर स्पर्श रेखा खींचना।

रचना के चरण :

1. OP को मिलाइए तथा इसे समद्विभाजित कीजिए। माना कि OP का मध्य-बिंदु M है।
2. M को केंद्र मानकर तथा MO त्रिज्या लेकर, एक अर्धवृत्त खींचिए। माना कि यह दिए गए वृत्त को Q पर प्रतिच्छेद करता है।
3. PQ को मिलाइए।
 वृत्त के बाहर एक बिंदु P से वृत्त पर PQ अभीष्ट स्पर्श रेखा है (आकृति 11.2)।



आकृति 11.2

इसकी जाँच, OQ को मिलाकर तथा $\angle PQO = 90^\circ$ (अर्धवृत्त का कोण) है या दूसरे शब्दों में, PQ, OQ पर लंब है, का प्रयोग करके की जा सकती है।

टिप्पणी : P से वृत्त पर दूसरी स्पर्श रेखा खींचने के लिए, केंद्र M तथा त्रिज्या MO लेकर पूर्ण वृत्त बनाइए। माना यह दिए गए वृत्त को एक अन्य बिंदु R पर प्रतिच्छेदित करता है। इस प्रकार, PR दूसरी स्पर्श रेखा होगी।

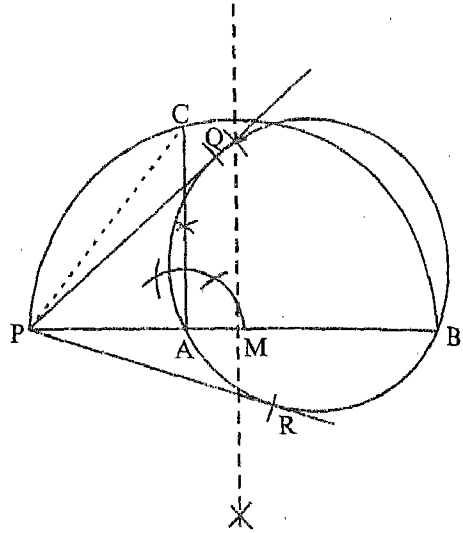
रचना 11.3 : *वृत्त के बाहर के एक बिंदु से वृत्त के केंद्र के प्रयोग किए बिना उस पर स्पर्श रेखाएँ खींचना।*

दिया है : एक वृत्त तथा उसके बाहर एक बिंदु P।

अभीष्ट : P से वृत्त पर केंद्र का प्रयोग किए बिना स्पर्श रेखाएँ खींचना।

रचना के चरण :

1. वृत्त की एक छेदक रेखा PAB खींचिए।
2. PB को समद्विभाजित कीजिए। माना M, PB का मध्य-बिंदु है।
3. M को केंद्र मानकर तथा MP त्रिज्या लेकर एक अर्धवृत्त की रचना कीजिए।
4. A से होकर जाने वाली PB पर लंब एक रेखा खींचिए। माना वह अर्धवृत्त को एक बिंदु C पर प्रतिच्छेद करती है।
5. P को केंद्र मानकर तथा त्रिज्या PC लेकर चाप खींचिए जो दिए गए वृत्त को दो बिंदुओं, माना Q तथा R पर प्रतिच्छेद करता है।



आकृति 11.3

6. PQ तथा PR को मिलाइए।

इस प्रकार, PQ तथा PR अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं (आकृति 11.3)।

टिप्पणी : यहाँ अर्धवृत्त को पूरा करने पर AC उस वृत्त की संगत जीवा की आधी होगी। अतः, प्रमेय 10.1 से,

$$PA\,.\,AB = AC^2$$

या $$PA(PB - PA) = AC^2$$

या $$PA\,.\,PB = PA^2 + AC^2 = PC^2$$

किसी भी वृत्त के लिए $PA\,.\,PB = PT^2$ (प्रमेय 10.2)।

अतः, PQ और PR दिए गए वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

11.3 त्रिभुज के अंतर्वृत्त तथा परिवृत्त की रचनाएँ

इस अनुच्छेद में, हम किसी त्रिभुज के अंतर्वृत्त तथा परिवृत्त की रचनाएँ देंगे।

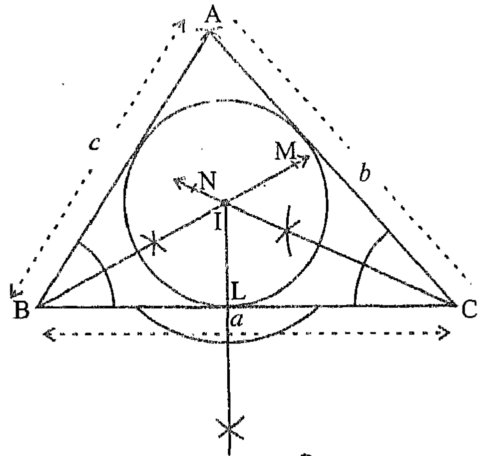
रचना 11.4 : *एक त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ a, b और c दी हुई हों, के अंतर्वृत्त की रचना करना।*

दिया है : एक त्रिभुज ABC, जिसमें $BC = a$, $CA = b$ तथा $AB = c$ है।

अभीष्ट : Δ ABC के अंतर्वृत्त की रचना करना।

रचना के चरण :

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = a$, $CA = b$ और $AB = c$ हो।
2. किन्हीं दो कोणों, माना $\angle B$ और $\angle C$ को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए इन कोणों के समद्विभाजक क्रमशः BM और CN हैं जो बिंदु I पर प्रतिच्छेद करते हैं।
3. भुजा BC (अथवा अन्य किसी भुजा) पर लंब IL खींचिए।
4. I को केंद्र मानकर तथा IL त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए।



आकृति 11.4

यही वृत्त, Δ ABC का अभीष्ट अंतर्वृत्त है (आकृति 11.4)।

टिप्पणी : क्योंकि यहाँ BC और BA को अंतर्वृत्त की स्पर्श रेखाएँ होना है, अतः इसका केंद्र I कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित होना चाहिए। इसी प्रकार I कोण ACB के भी समद्विभाजक पर स्थित होना चाहिए। इसलिए I इन दोनों कोणों के समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिंदु है तथा IL इसकी त्रिज्या है।

रचना 11.5 : *भुजाओं a, b, c वाले त्रिभुज के परिवृत्त की रचना करना।*

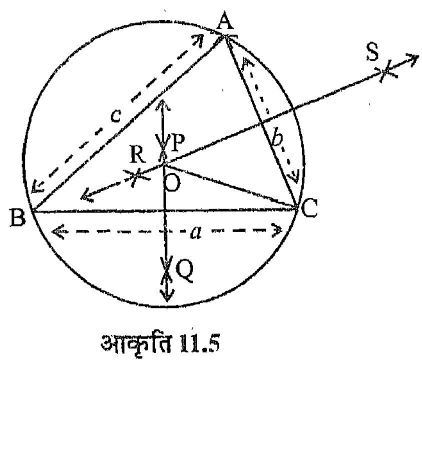
दिया है : एक त्रिभुज ABC जिसमें $BC = a$, $CA = b$ तथा $AB = c$ है।

अभीष्ट : त्रिभुज ABC के परिवृत्त की रचना करना।

रचना के चरण :

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = a$, $CA = b$ तथा $AB = c$ हो।
2. किन्हीं दो भुजाओं यथा BC और AC के लंब समद्विभाजक क्रमशः PQ तथा RS खींचिए। मान लीजिए, ये बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।
3. O को केंद्र मानकर तथा OC (या OB या OA) त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए।

   यही वृत्त, त्रिभुज ABC का अभीष्ट परिवृत्त है (आकृति 11.5)।



आकृति 11.5

टिप्पणी : यहाँ क्योंकि PQ, BC का लंब समद्विभाजक है तथा बिंदु O इस पर स्थित है, इसलिए $OB = OC$ है। इसी प्रकार, $OC = OA$ है। अतः, $OA = OB = OC$ है। इस प्रकार, वृत्त A, B तथा C से होकर जाता है।

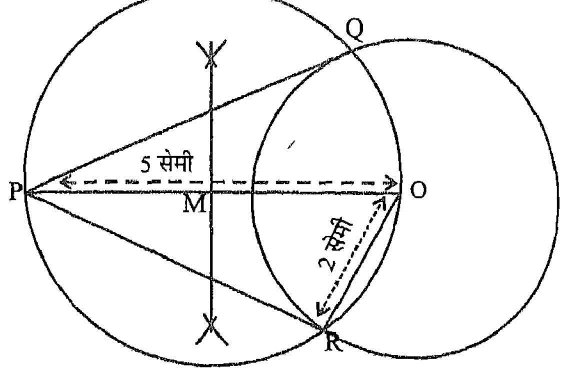
अब हम इन रचनाओं को निम्न उदाहरणों द्वारा समझते हैं :

उदाहरण 1 : 2 सेमी त्रिज्या के वृत्त के केंद्र से 5 सेमी दूर एक बिंदु से स्पर्श रेखा-युग्म खींचिए तथा प्रत्येक की लंबाई मापिए।

हल : हमें केंद्र O तथा 2 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त तथा O से 5 सेमी दूर एक बिंदु P दिया है। हमें P से वृत्त पर स्पर्श रेखा-युग्म खींचना है तथा प्रत्येक स्पर्श रेखा की लंबाई मापनी है।

रचना के चरण :

1. रेखाखंड OP को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए समद्विभाजक बिंदु M है।
2. M को केंद्र मानकर तथा OM त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए। मान लीजिए यह दिए गए वृत्त को बिंदुओं Q तथा R पर प्रतिच्छेद करता है।
3. PQ तथा PR को मिलाइए (आकृति 11.6)।
   PQ तथा PR ही अभीष्ट स्पर्श रेखा-युग्म है। मापने पर, हमें प्राप्त होता है :
   $PQ = PR = 4.6$ सेमी लगभग।



आकृति 11.6

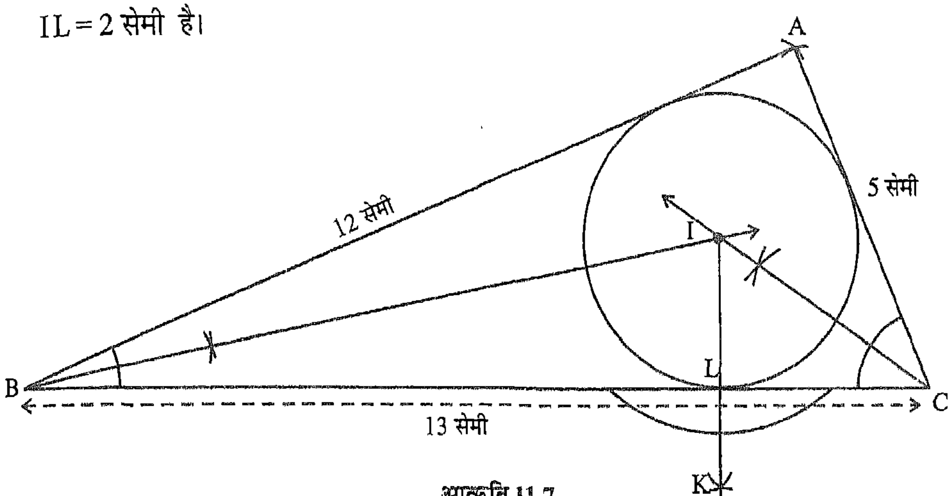
उदाहरण 2 : एक त्रिभुज के अंतर्वृत्त की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 12 सेमी तथा 13 सेमी हैं तथा उसकी त्रिज्या मापिए।

हल : हमें एक त्रिभुज ABC दिया है जिसमें $BC = 13$ सेमी, $CA = 5$ सेमी तथा $AB = 12$ सेमी है। हमें इसका अंतर्वृत्त खींचना है तथा उसकी त्रिज्या मापनी है।

रचना के चरण :

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 13$ सेमी, $CA = 5$ सेमी तथा $AB = 12$ सेमी हो।
2. कोणों B और C को समद्विभाजित कीजिए। मान लीजिए इनके समद्विभाजक बिंदु I पर प्रतिच्छेद करते हैं।
3. BC पर लंब IK खींचिए। माना IK, BC को L पर प्रतिच्छेद करता है।

4. I को केंद्र मानकर तथा IL त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचिए (आकृति 11.7)। यही वृत्त Δ ABC का अभीष्ट अंतर्वृत्त है। मापने पर, हम पाते हैं कि इसकी त्रिज्या IL = 2 सेमी है।



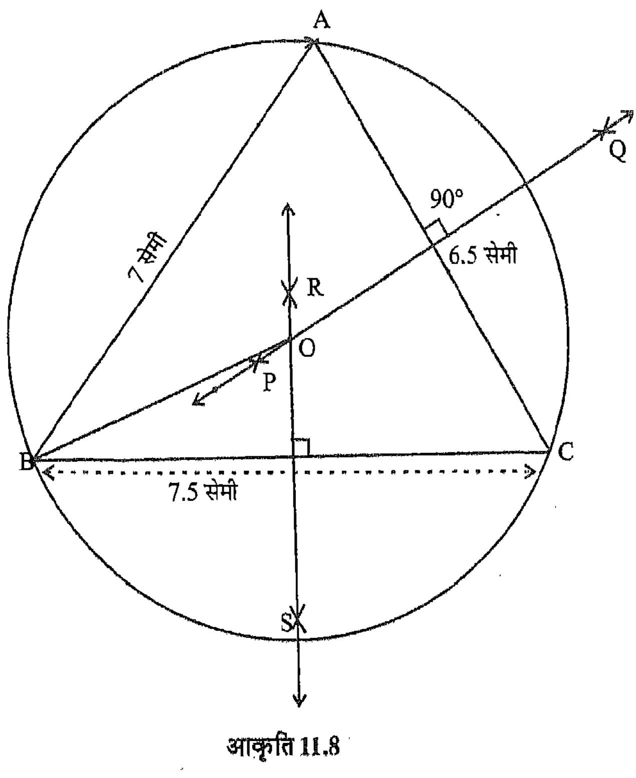
आकृति 11.7

उदाहरण 3 : उस त्रिभुज के परिवृत्त की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 6.5 सेमी, 7 सेमी तथा 7.5 सेमी हैं तथा उसकी त्रिज्या की माप ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए हमें एक त्रिभुज ABC दिया है जिसमें BC = 7.5 सेमी, CA = 6.5 सेमी तथा AB = 7 सेमी है। हमें इसका परिवृत्त खींचना है तथा उसकी त्रिज्या मापनी है।

रचना के चरण :

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 7.5 सेमी, CA = 6.5 सेमी तथा AB = 7 सेमी हो।
2. भुजाओं BC तथा CA के लंब समद्विभाजक क्रमशः RS तथा PQ खींचिए। मान लीजिए ये बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 11.8

3. OB को मिलाइए। O को केंद्र मानकर तथा त्रिज्या OB लेकर एक वृत्त खींचिए (आकृति 11.8)।

यही वृत्त त्रिभुज ABC का अभीष्ट परिवृत्त है। मापने पर, हम पाते हैं कि इसकी त्रिज्या OB = 4 सेमी लगभग है।

प्रश्नावली 11.1

1. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 4 सेमी, 5 सेमी तथा 6 सेमी हैं। इसका परिवृत्त खींचिए तथा उसकी त्रिज्या की माप लिखिए।
2. एक समबाहु त्रिभुज, जिसकी एक भुजा 6 सेमी हो, के परिवृत्त की रचना कीजिए और उसकी त्रिज्या की माप लिखिए।
3. उस त्रिभुज के अंतर्वृत्त की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 3 सेमी, 4 सेमी तथा 5 सेमी हों तथा उसकी त्रिज्या मापकर लिखिए।
4. 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके केंद्र से 10 सेमी दूर एक बिंदु से इस पर स्पर्श रेखा-युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापकर लिखिए।
5. 6 सेमी त्रिज्या के एक वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो एक-दूसरे से 60° पर झुकी हों।

   [**संकेत :** उन दो त्रिज्याओं के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो एक-दूसरे से 120° पर झुकी हों।]
6. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 12 सेमी तथा 13 सेमी हों। इसका परिवृत्त खींचिए तथा उसकी त्रिज्या की माप लिखिए।
7. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 3.5 सेमी, $\angle B = 60°$ तथा शीर्षलंब AD = 2.5 सेमी हो तथा उसका परिवृत्त खींचिए।
8. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 8 सेमी तथा शीर्षलंब 4 सेमी हो। इसका अंतर्वृत्त खींचिए तथा उसकी त्रिज्या की माप लिखिए।

11.4 कुछ अन्य रचनाएँ

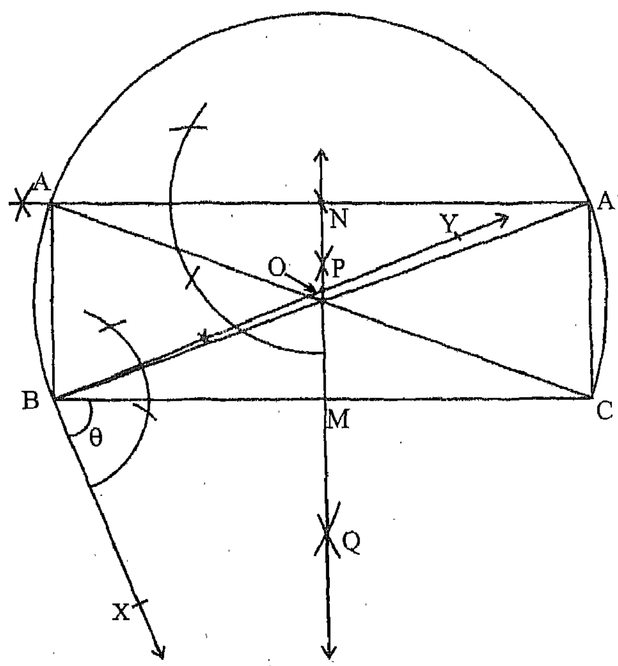
इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुजों की उन रचनाओं की चर्चा करेंगे जिनमें वृत्त की रचना का समावेश हो तथा दिए गए त्रिभुजों और चतुर्भुजों के समरूप त्रिभुजों और चतुर्भुजों की रचनाओं की भी चर्चा करेंगे।

अभीष्ट : त्रिभुज ABC की रचना करना

रचना के चरण :

1. रेखाखंड BC = a खींचिए।
2. BC के एक ओर $\angle CBX = \theta$ बनाइए।
3. BX पर एक लंब रेखा BY खींचिए।
4. रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक PQ खींचिए। मान लीजिए वह BY को बिंदु O पर तथा BC को M पर प्रतिच्छेद करता है।
5. O को केंद्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर कोण θ के एकांतर वृत्तखंड खींचिए।
6. बिंदु M से रेखा PQ पर MN = h काटिए।
7. PQ पर N से होकर जाने वाली लंब रेखा खींचिए जो वृत्तखंड को मान लीजिए A तथा A′ पर प्रतिच्छेद करती है।
8. AB, AC, A′B तथा A′C को मिलाइए।

इस प्रकार प्राप्त ABC और A′BC ही अभीष्ट त्रिभुज हैं (आकृति 11.9)।



आकृति 11.9

टिप्पणी : प्रमेय 10.3 से देखा जा सकता है कि $\angle CBX = \angle BAC = \angle BA'C = \theta$ तथा त्रिभुज ABC (या A′BC) की ऊँचाई $= NM = h$ है।

रचना 11.7 : *एक त्रिभुज की रचना करना जिसका आधार, शीर्ष कोण तथा शीर्ष से होकर जाने वाली माध्यिका दी हो।*

दिया है : आधार $BC = a$, कोण $A = \theta$ तथा A से होकर जाने वाली माध्यिका $AM = h$।

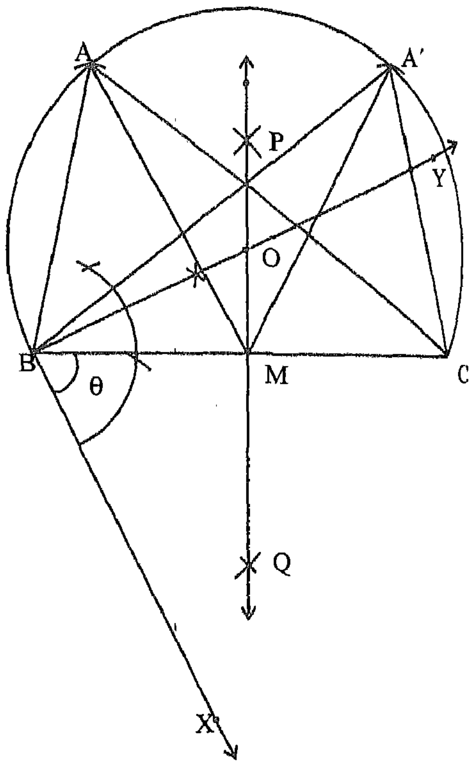
अभीष्ट : ΔABC की रचना करना।

रचना के चरण :

1. रेखाखंड $BC = a$ खींचिए।
2. BC के एक ओर $\angle CBX = \theta$ बनाइए।
3. BX पर एक लंब रेखा BY खींचिए।
4. रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक PQ खींचिए। मान लीजिए वह BY को बिंदु O पर तथा BC को बिंदु M पर प्रतिच्छेद करता है।
5. O को केंद्र मानकर तथा OB त्रिज्या लेकर कोण θ के एकांतर वृत्तखंड खींचिए।
6. बिंदु M को केंद्र मानकर तथा त्रिज्या h लेकर वृत्त का चाप खींचिए जो वृत्तखंड को बिंदुओं A तथा A′ पर प्रतिच्छेद करता है।
7. AB, AC, A′B और A′C को मिलाइए।

इस प्रकार प्राप्त ABC और A′BC ही अभीष्ट त्रिभुज हैं (आकृति 11.10)।

यहाँ भी $\angle BAC = \angle BA'C = \angle CBX = \theta$ तथा माध्यिकाएँ $AM = A'M = h$।



आकृति 11.10

रचना 11.8 : *एक दिए हुए त्रिभुज के समरूप एक दिए गए स्केल गुणक में त्रिभुज की रचना करना।*

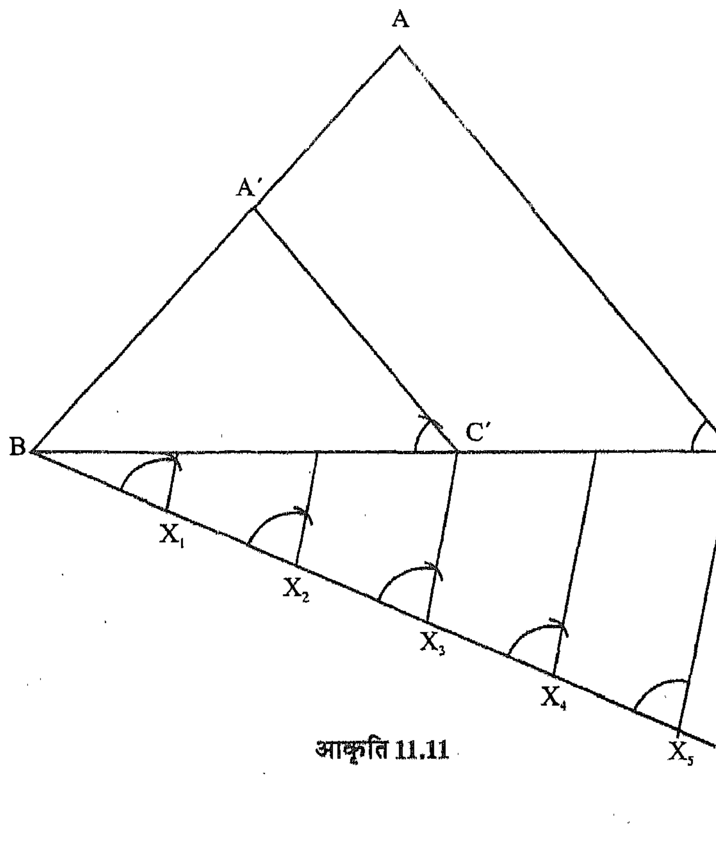
इस रचना को उपयुक्त उदाहरण लेकर भली प्रकार समझा जा सकता है। यहाँ *स्केल गुणक* (*scale factor*) का तात्पर्य रचना किए जाने वाले त्रिभुज की भुजाओं का दिए गए त्रिभुज की संगत भुजाओं के अनुपात से है।

उदाहरण 4 : एक दिए हुए त्रिभुज ABC के समरूप एक त्रिभुज की रचना करना जिसकी प्रत्येक भुजा ΔABC की संगत भुजा का $\frac{3}{5}$ वाँ भाग हो।

हल : दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज A′BC′ की रचना करना जिसमें $A'B = \frac{3}{5} AB$, $A'C' = \frac{3}{5} AC$ तथा $BC' = \frac{3}{5} BC$ हो।

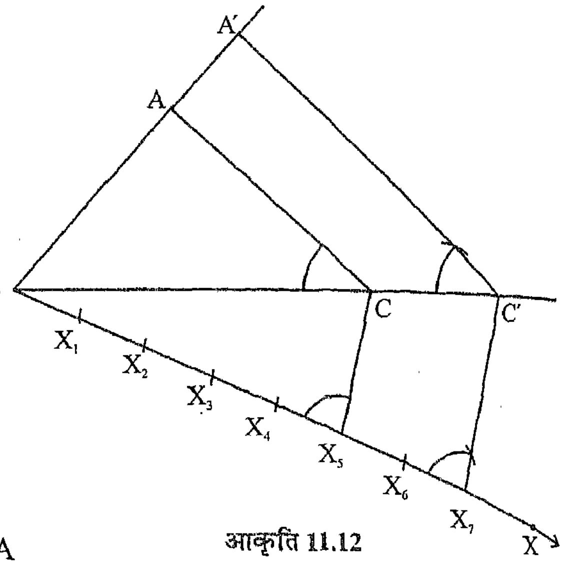
रचना के चरण :

1. आधार BC को पाँच समान भागों में विभाजित कीजिए। माना BC पर C′ एक ऐसा बिंदु है कि $BC' = \frac{3}{5} BC$ है।
2. CA के समांतर एक रेखा C′A′ खींचिए जो BA को A′ पर प्रतिच्छेद करती है।
   इस प्रकार प्राप्त A′BC′ ही अभीष्ट त्रिभुज है (आकृति 11.11)।



आकृति 11.11

उदाहरण 5 : किसी त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा त्रिभुज ABC की संगत भुजा का $\frac{7}{5}$वाँ भाग हो।



आकृति 11.12

हल : दिए गए त्रिभुज ABC के समरूप त्रिभुज A'BC' की रचना करना, जिसमें $A'B = \frac{7}{5}$ AB, $A'C' = \frac{7}{5}$ AC तथा $BC' = \frac{7}{5}$ BC हो।

रचना के चरण :

1. BC से किसी न्यून कोण पर झुकी तथा A से विपरीत दिशा में एक किरण BX खींचिए।
2. BX पर B से आरंभ करके सात समान रेखाखंड BX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_6 तथा X_6X_7 चिह्नित कीजिए।
3. X_5C को मिलाइए तथा X_5C के समांतर एक रेखा X_7C' खींचिए जो बढ़ाई गई BC को C' पर प्रतिच्छेद करे।
4. CA के समांतर एक रेखा C'A' खींचिए जो बढ़ाई गई BA को A' पर प्रतिच्छेद करे। इस प्रकार प्राप्त A'BC' ही अभीष्ट त्रिभुज है (आकृति 11.12)।

रचना 11.9 : *एक दिए गए चतुर्भुज के समरूप एक दिए गए स्केल गुणक से एक चतुर्भुज की रचना करना।*

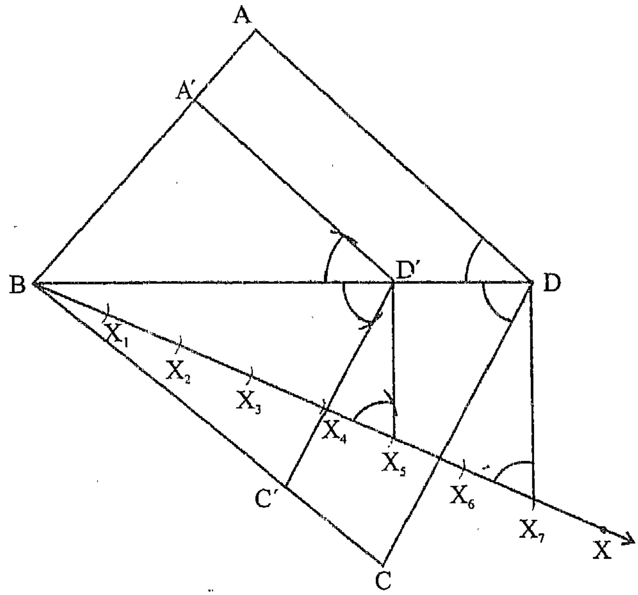
इस रचना को भी उपयुक्त उदाहरण द्वारा भली प्रकार समझा जा सकता है।

उदाहरण 6 : एक चतुर्भुज के समरूप एक चतुर्भुज की रचना करना जिसकी प्रत्येक भुजा दिए गए चतुर्भुज की संगत भुजा का $\frac{5}{7}$वाँ भाग हो।

हल : एक चतुर्भुज ABCD दिया है तथा एक समरूप चतुर्भुज A'BC'D' की रचना करनी है, जिसमें $A'B = \frac{5}{7}$ AB, $BC' = \frac{5}{7}$ BC, $C'D' = \frac{5}{7}$ CD तथा $A'D' = \frac{5}{7}$ AD हो।

रचना के चरण :

1. BD को मिलाइए और BD से किसी न्यून कोण पर झुकी एक किरण BX खींचिए।
2. BX पर B से आरंभ करके सात समान रेखाखंड BX_1, X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_6 तथा X_6X_7 चिह्नित कीजिए।



आकृति 11.13

3. DX_7 को मिलाइए तथा X_7D' के समांतर एक रेखा X_5D' खींचिए जो BD को D′ पर प्रतिच्छेद करती है।
4. DA के समांतर रेखा D′A′ खींचिए जो AB को A′ पर प्रतिच्छेद करती है तथा DC के समांतर रेखा D′C′ खींचिए जो BC को C′ पर प्रतिच्छेद करती है।

   इस प्रकार प्राप्त A′BC′D′ ही अभीष्ट चतुर्भुज है (आकृति 11.13)।

प्रश्नावली 11.2

1. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 5 सेमी, $\angle A = 60°$ तथा शीर्षलंब AD = 4 सेमी हो।
2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AC = 6 सेमी, $\angle B = 30°$ तथा शीर्षलंब BD = 5 सेमी हो।
3. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें BC = 6 सेमी, $\angle A = 45°$ तथा माध्यिका AD = 5 सेमी हो।

4. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें AB = 5 सेमी, $\angle C = 30°$ तथा माध्यिका CD = 4 सेमी हो।

5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 7.5 सेमी, 7 सेमी तथा 6.5 सेमी हों। Δ ABC के समरूप एक दूसरे त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा Δ ABC की संगत भुजा का $\frac{2}{3}$ वाँ भाग हो।

6. एक दिए हुए त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 5 सेमी, 12 सेमी तथा 13 सेमी हों, के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिए गए त्रिभुज की संगत भुजा का $\frac{3}{5}$ वाँ भाग हो।

7. भुजाओं 6 सेमी, 7 सेमी तथा 8 सेमी वाले त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा दिए गए त्रिभुज की संगत भुजा का $\frac{7}{5}$ वाँ भाग हो।

8. एक चतुर्भुज ABCD, जिसमें AB = 6.3 सेमी, BC = 5.2 सेमी, CD = 5.6 सेमी, DA = 7.1 सेमी तथा $\angle B = 60°$ है, के समरूप एक चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा चतुर्भुज ABCD की संगत भुजा का $\frac{4}{5}$ वाँ भाग हो।

9. एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 6 सेमी, CA = 4 सेमी तथा AD = 2 सेमी हो। ABCD के समरूप एक चतुर्भुज की भी रचना कीजिए जिसकी प्रत्येक भुजा चतुर्भुज ABCD की संगत भुजा का 1.5 गुना हो।

अध्याय 12

त्रिकोणमिति

12.1 भूमिका

आप नवीं कक्षा में त्रिकोणमिति की कुछ प्रारंभिक संकल्पनाओं जैसे त्रिकोणमितीय अनुपात, दिए गए एक त्रिकोणमितीय अनुपात से अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना, कुछ विशेष कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना और त्रिकोणमितीय अनुपात का प्रयोग करके समकोण त्रिभुज को हल करने आदि का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में, हम त्रिकोणमितीय अनुपातों की और अधिक चर्चा करेंगे, कुछ मूलभूत सर्वसमिकाओं का अध्ययन करेंगे और इन सर्वसमिकाओं की सहायता से अन्य त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ प्राप्त करेंगे।

12.2 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

एक न्यून कोण AOB लीजिए (आकृति 12.1)। किरण OB पर एक बिन्दु P लीजिए और OA पर लंब PQ डालिए। इस प्रकार, हमें एक समकोण त्रिभुज PQO प्राप्त होता है। मान लीजिए $\angle POQ = \theta$ है।

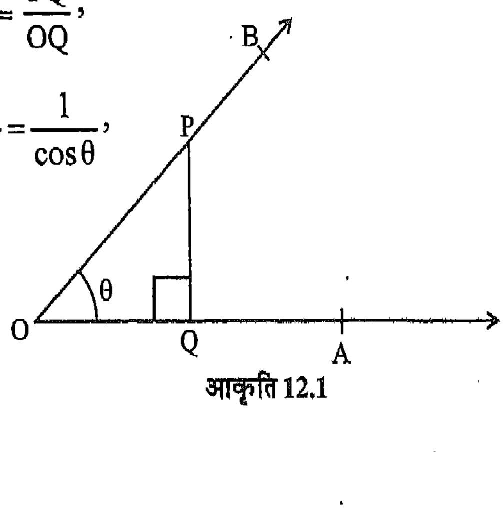
याद कीजिए

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP},\ \cos\theta = \frac{OQ}{OP},\ \tan\theta = \frac{PQ}{OQ},$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{1}{\tan\theta}$$

और $$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{PQ}{OP} \div \frac{OQ}{OP} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



आकृति 12.1

पुनः, समकोण त्रिभुज PQO में,

$$OQ^2 + PQ^2 = OP^2$$ (पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करने से) (1)

या $$\frac{OQ^2}{OP^2} + \frac{PQ^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2}$$ (OP^2 से भाग देने पर)

या $$\left(\frac{OQ}{OP}\right)^2 + \left(\frac{PQ}{OP}\right)^2 = 1$$

या $$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$$

या $$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ (2)

इसी प्रकार, (1) के दोनों पक्षों को OQ^2 से भाग देने पर,

$$\frac{OQ^2}{OQ^2} + \frac{PQ^2}{OQ^2} = \frac{OP^2}{OQ^2}$$

या $$1 + \left(\frac{PQ}{OQ}\right)^2 = \left(\frac{OP}{OQ}\right)^2$$

या $$1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$$

या $$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$ (3)

पुनः, (1) के दोनों पक्षों को PQ^2 से भाग देने पर,

$$\left(\frac{OQ}{PQ}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OP}{PQ}\right)^2$$

या $$(\cot\theta)^2 + 1 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$$

या $$\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$$ (4)

ऊपर पाए गए संबंध (2), (3) व (4) सभी मूलभूत सर्वसमिकाएँ हैं। प्रत्येक सर्वसमिका अन्य सर्वसमिकाओं की सहायता से सिद्ध की जा सकती है। उदाहरणार्थ, सर्वसमिकाओं (3) व

(4) को सर्वसमिका (2) की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है। (2) के दोनों पक्षों को क्रमश: $\cos^2\theta$ और $\sin^2\theta$ से भाग देने पर सर्वसमिकाएँ (3) व (4) प्राप्त हो जाती हैं। (2), (3) व (4) को कभी-कभी *पाइथागोरियन सर्वसमिकाएँ* भी कहते हैं। क्योंकि उपर्युक्त सर्वसमिका (1) प्राप्त करने के लिए पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग करते हैं, इसीलिए इन्हें संभवत: पाइथागोरियन सर्वसमिकाएँ कहा जाता है।

प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपात में व्यक्त करने के लिए, हम मूलभूत सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, $0° < \theta < 90°$ के लिए, $\sin\theta$ को $\cos\theta$, $\tan\theta$ आदि में व्यक्त किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$\therefore$ $\quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ [न्यून कोणों के लिए $\sin\theta > 0$]

या $\quad \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

इसी प्रकार, $\quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

अत:, $\quad \sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$

या $\quad \tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1}$

साथ ही, $\quad \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta}$

या $\quad \cot\theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1}$

साथ ही, $\quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ [$0° < \theta < 90°$, सर्वसमिका (2) का प्रयोग करने पर]

इसी प्रकार, प्रत्येक त्रिकोणमितीय अनुपात को दूसरे त्रिकोणमितीय अनुपातों में बदला जा सकता है। इन्हें आगे सारणी 12.1 में दिया जा रहा है।

सारणी 12.1

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\cos\theta$	$\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}{\operatorname{cosec}\theta}$
$\tan\theta$	$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}}$
$\operatorname{cosec}\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\operatorname{cosec}\theta$

त्रिकोणमितीय अनुपातों वाले व्यंजकों और अन्य दी गई सर्वसमिकाओं को सरल करने में मूलभूत सर्वसमिकाओं का उपयोग किया जाता है, जैसा कि नीचे उदाहरणों में दर्शाया गया है।

उदाहरण 1 : व्यंजक $\sin\theta(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)$ को सरल कीजिए।

हल : $\sin\theta(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta) = \sin\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)$

$$= 1-\sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta \qquad \text{[सर्वसमिका (2) का उपयोग करने पर]}$$

उदाहरण 2: सरल कीजिए :

$$(\sec\theta+\tan\theta)(1-\sin\theta)$$

हल : $(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sin\theta) = \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \sin\theta)$

$$= \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)(1-\sin\theta)$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$ [सर्वसमिका (2) का उपयोग करने पर]

उदाहरण 3: सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\cos^2\theta + \tan^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \tan^2\theta$$

हल : बायाँ पक्ष $= \frac{\cos^2\theta + \tan^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \frac{\tan^2\theta + \cos^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \frac{\tan^2\theta - (1-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}$

$$= \frac{\tan^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$ [सर्वसमिका (2) का उपयोग करने पर]

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta} - 1$$

$$= \sec^2\theta - 1$$

$$= \tan^2\theta$$ [सर्वसमिका (3) का उपयोग करने पर]

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 4: सिद्ध कीजिए :

$$\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta\sec\theta$$

हल : बायाँ पक्ष $= \cot\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \qquad \text{[सर्वसमिका (2) का उपयोग करने पर]}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

$= \text{cosec}\,\theta \sec\theta =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 5 : दर्शाइए :

$$\tan^4 A + \tan^2 A = \sec^4 A - \sec^2 A$$

हल : बायाँ पक्ष $= \tan^4 A + \tan^2 A = \tan^2 A\,(\tan^2 A + 1)$

$= (\sec^2 A - 1)\,(\sec^2 A)$ [सर्वसमिका (3) का उपयोग करने पर]

$= \sec^4 A - \sec^2 A$

$=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 6 : निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \frac{\text{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \text{cosec}^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

हल : चूंकि दाएँ पक्ष में केवल $\sin\theta$ और $\cos\theta$ हैं, इसलिए यह बाएँ पक्ष के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sin\theta$ और $\cos\theta$ में बदलने का संकेत देता है। अतः, हम पाते हैं :

$$\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 1} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \qquad (1)$$

$$\frac{\text{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \text{cosec}^2\theta} = \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \frac{\text{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \text{cosec}^2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 7: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A} - 1} + \frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A} + 1} = 2\sec^2 A$$

हल : $$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A} - 1} + \frac{\text{cosec A}}{\text{cosec A} + 1} = \text{cosec A}\left[\frac{1}{\text{cosec A} - 1} + \frac{1}{\text{cosec A} + 1}\right]$$

$$= \text{cosec A}\left[\frac{\text{cosec A} + 1 + \text{cosec A} - 1}{(\text{cosec A} - 1)(\text{cosec A} + 1)}\right]$$

$$= \frac{\text{cosec A}.(2\,\text{cosec A})}{\text{cosec}^2 A - 1} = \frac{2\,\text{cosec}^2 A}{\cot^2 A}$$ [सर्वसमिका (4) का प्रयोग करने पर]

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{2}{\cos^2 A} = 2\sec^2 A$$

= दायाँ पक्ष

प्रश्नावली 12.1

1. सरल कीजिए : $\dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$

2. सिद्ध कीजिए : $(\text{cosec}\,\theta + \cot\theta)(1 - \cos\theta) = \sin\theta$

3. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \sec\theta - 1$

4. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करते हुए, निम्न व्यंजकों को पूर्णांकों के रूप में लिखिए :

   (i) $3\cot^2 A - 3\,\text{cosec}^2 A$

(ii) $4 \tan^2 A - 4 \sec^2 A$
(iii) $5 \sin^2 \theta + 5 \cos^2 \theta$
(iv) $7 \sec^2 B - 7 \tan^2 B$

5. निम्न व्यंजकों को सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$

(ii) $\dfrac{2 - \tan\theta}{2 \operatorname{cosec} \theta - \sec\theta}$

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

6. $\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin \theta} = 1 + \cot \theta$

7. $\dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \cot \theta - \tan \theta$

8. $\dfrac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = 1$

9. $\dfrac{\sec^2\theta - \sin^2\theta}{\tan^2\theta} = \operatorname{cosec}^2 \theta - \cos^2\theta$

10. $\dfrac{1}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1}{1 + \sin\theta} = 2 \sec^2\theta$

11. $\dfrac{\tan^3 \theta - 1}{\tan \theta - 1} = \sec^2 \theta + \tan \theta$

12. $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

13. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

14. $\dfrac{1+\cos^2 A}{\sin^2 A} = 2\,\text{cosec}^2 A - 1$

15. $\tan^2\phi + \sin^2\phi = \tan^2\phi\sin^2\phi$

16. $\dfrac{\sec\phi - 1}{\sec\phi + 1} = \dfrac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}$

17. $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

18. $\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

19. $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \text{cosec}\,A - \cot A$

20. $\dfrac{1+\cos A}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{1+\cos A} = \dfrac{2}{\sin A}$

21. $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \dfrac{2}{1-2\cos^2\theta} = \dfrac{2}{2\sin^2\theta - 1}$

22. $(\text{cosec}\,A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A) = 1$

23. $\dfrac{2\cos^2\theta - 1}{\sin\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

24. $(\sec A - \cos A)(\cot A + \tan A) = \tan A\sec A$

25. $\dfrac{\sec\theta+\tan\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

26. $\dfrac{\cot\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{\cot\theta-1}{2-\sec^2\theta}$

27. $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$

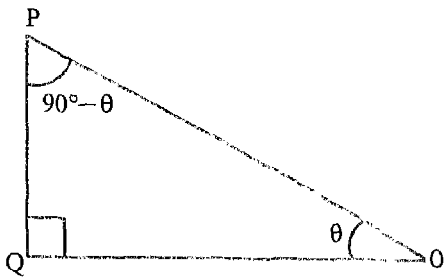
28. $\tan^2\phi+\cot^2\phi+2=\sec^2\phi\ \text{cosec}^2\phi$

29. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=2\sec\theta$

30. $\dfrac{\tan A}{\sec A-1}+\dfrac{\tan A}{\sec A+1}=2\,\text{cosec}\,A$

12.3 पूरक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

एक समकोण त्रिभुज PQO (आकृति 12.2) पर विचार कीजिए। माना कि $\angle POQ=\theta$ है। तब $\angle QPO=90°-\theta$ होगा। स्पष्टत: $\angle POQ$ तथा $\angle QPO$ पूरक कोण हैं। हम जानते हैं कि



आकृति 12.2

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta&=\frac{PQ}{OP},\ \cos\theta=\frac{OQ}{OP},\ \tan\theta=\frac{PQ}{OQ}\\ \text{cosec}\,\theta&=\frac{OP}{PQ},\ \sec\theta=\frac{OP}{OQ},\ \cot\theta=\frac{OQ}{PQ}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

अब $\angle QPO$ पर विचार कीजिए जो कि $(90°-\theta)$ के बराबर है। यहाँ संलग्न भुजा PQ है तथा सम्मुख भुजा OQ है। आइए अब हम $\angle QPO$ के त्रिकोणमितीय अनुपातों पर विचार करें। हम पाते हैं कि

$$\sin(90°-\theta)=\frac{OQ}{OP}=\cos\theta \qquad [(1)\text{ का प्रयोग करने पर}]$$

इसी प्रकार,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{PQ}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{OQ}{PQ} = \cot\theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{PQ}{OQ} = \tan\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{PQ} = \text{cosec}\,\theta$$

$$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OQ} = \sec\theta$$

इस प्रकार,

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\end{aligned}\right\}, 0^\circ<\theta<90^\circ \text{ के लिए}$$

साथ ही, $\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ$

और $\sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ$

अत:,

$$\left.\begin{aligned}\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\end{aligned}\right\}, 0^\circ\le\theta\le90^\circ \text{ के लिए}$$

इसी प्रकार,

$\tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta,\quad 0^\circ < \theta \le 90^\circ$ के लिए

$\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta,\quad 0^\circ \le \theta < 90^\circ$ के लिए

$\sec(90^\circ - \theta) = \text{cosec}\,\theta,\quad 0^\circ < \theta \le 90^\circ$ के लिए

$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec\theta,\quad 0^\circ \le \theta < 90^\circ$ के लिए

आप देख सकते हैं कि $\tan 0^\circ = 0 = \cot 90^\circ$, $\sec 0^\circ = 1 = \text{cosec}\,90^\circ$ और $\tan 90^\circ$, $\sec 90^\circ$ इत्यादि परिभाषित नहीं हैं।

टिप्पणी : हम देखते हैं कि

किसी कोण का sine = उसके पूरक कोण का cosine,

किसी कोण का tangent = उसके पूरक कोण का cotangent,

किसी कोण का secant = उसके पूरक कोण का cosecant,

और इनका विलोम भी सत्य है। हो सकता है इसी कारण sine, tangent और secant के साथ पहले (prefix) 'co' लगाकर क्रमशः cosine, cotangent और cosecant प्राप्त किए गए हैं। आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 8 : $\dfrac{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ}$ का मान निकालिए।

हल : $\cos 80^\circ = \sin (90^\circ - 80^\circ)$ $[\because \ \cos\theta = \sin (90^\circ - \theta)]$

$= \sin 10^\circ$

$$\therefore \quad \frac{\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 1$$

उदाहरण 9 : $\sin 81^\circ + \tan 71^\circ$ को 0° और 45° के कोणों के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\sin 81^\circ + \tan 71^\circ = \cos (90^\circ - 81^\circ) + \cot (90^\circ - 71^\circ)$

$= \cos 9^\circ + \cot 19^\circ$

उदाहरण 10 : θ का मान ज्ञात कीजिए, यदि

$\sin (\theta + 36^\circ) = \cos\theta$, जहाँ $\theta + 36^\circ$ एक न्यून कोण है।

हल : $\sin (\theta + 36^\circ) = \cos\theta$ (दिया है)

या $\cos [90^\circ - (\theta + 36^\circ)] = \cos\theta$

$\therefore$ $90^\circ - (\theta + 36^\circ) = \theta$

या $2\theta = 54^\circ$

या $\theta = 27^\circ$

उदाहरण 11 : यदि $\tan 2\theta = \cot (\theta + 6^\circ)$ है, जहाँ 2θ तथा $(\theta + 6^\circ)$ न्यून कोण हैं, तो θ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\tan 2\theta = \cot(\theta + 6^\circ)$$

या $\cot(90^\circ - 2\theta) = \cot(\theta + 6^\circ)$

$\therefore$ $90^\circ - 2\theta = \theta + 6^\circ$

या $3\theta = 84^\circ$

या $\theta = 28^\circ$

प्रश्नावली 12.2

1. $\dfrac{\cos 59^\circ}{\sin 31^\circ}$ का मान निकालिए।

2. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\dfrac{\tan 49^\circ}{\cot 41^\circ}$ (ii) $\dfrac{\cot 50^\circ}{\tan 40^\circ}$

3. दर्शाइए : $\dfrac{\text{cosec } 39^\circ}{\sec 51^\circ} = 1$

4. $\cos 75^\circ + \cot 75^\circ$ को कोणों 0° और 45° के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

5. मान निकालिए :

   (i) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ$ (ii) $\dfrac{\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ}{\sin^2 59^\circ + \sin^2 31^\circ}$

6. मान निकालिए :

$$\left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 63^\circ}\right)^2 + \left(\frac{\cos 63^\circ}{\sin 27^\circ}\right)^2$$

7. मान निकालिए :

   $\text{cosec}^2 67^\circ - \tan^2 23^\circ$

सिद्ध कीजिए :

8. $\frac{\cos(90°-\theta)}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos(90°-\theta)}=2, \theta\neq 0°$

9. $\sec^2\theta-\cot^2(90°-\theta)=\cos^2(90°-\theta)+\cos^2\theta$

10. $\frac{\cos(90°-\theta)\cos\theta}{\tan\theta}+\cos^2(90°-\theta)=1$

11. $\cos(81°+\theta)=\sin(9°-\theta)$

12. $\frac{\cos 20°}{\sin 70°}+\frac{\cos\theta}{\sin(90°-\theta)}=2$

13. $\sin(90°-\theta)\ \cos(90°-\theta)\ =\ \frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

14. $\sin\theta\cos(90°-\theta)+\cos\theta\sin(90°-\theta)=1$

15. $\cos\theta\cos(90°-\theta)-\sin\theta\sin(90°-\theta)=0$

16. $\cot(90°-\theta)\sin(90°-\theta)=\sin\theta$

17. $\tan 15°\tan 20°\tan 70°\tan 75°=1$

18. मान निकालिए :

$$\frac{3\sin 62°}{\cos 28°}-\frac{\sec 42°}{\operatorname{cosec} 48°}$$

19. यदि $\sin 3\theta=\cos(\theta-6°)$, जहाँ 3θ और $\theta-6°$ न्यून कोण हों, तो θ का मान निकालिए।

20. यदि A और B न्यून कोण हों और $\sin A=\cos B$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A+B=90°$ है।

21. यदि A, B, C किसी त्रिभुज के अंतः कोण हैं, तो दर्शाइए कि

$$\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$

[**संकेत :** त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।]

अध्याय 13

ऊँचाई और दूरी

13.1 भूमिका

कई बार हमें मीनार, भवन या पेड़ की ऊँचाई, जहाज की प्रकाश स्तंभ से दूरी, नदी की चौड़ाई आदि को मापने की आवश्यकता पड़ती है। यद्यपि हम उन्हें आसानी से माप नहीं सकते हैं, परंतु हम त्रिकोणमिति की संकल्पना से उन्हें ज्ञात कर सकते हैं।

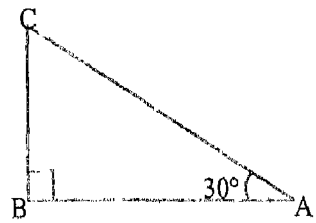
13.2 समकोण त्रिभुज का हल

नवीं कक्षा में, हम पढ़ चुके हैं कि यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और एक अन्य भाग (भुजा या कोण) दिया गया हो, तो त्रिभुज के शेष भागों को ज्ञात किया जा सकता है। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए :

उदाहरण 1: ΔABC में, $\angle B$ समकोण है, $AB = 12$ सेमी और $\angle A = 30°$ है (आकृति 13.1)। BC और AC ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिभुज ABC में,

$$\frac{BC}{AB} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



आकृति 13.1

$$\therefore \quad BC = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

या $$BC = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ सेमी} = 4\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

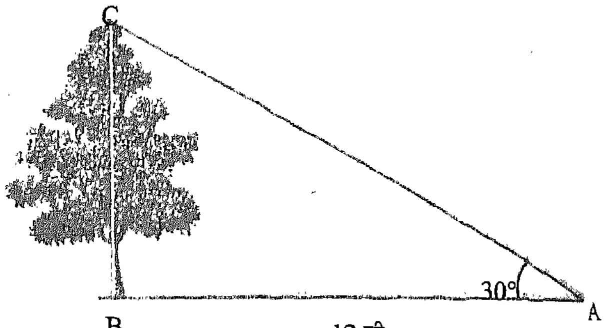
इसी प्रकार, हम AC ज्ञात कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिया हुआ है :

$$\frac{AB}{AC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

या $$AC = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ सेमी} = 8\sqrt{3} \text{ सेमी}$$

13.3 अनुप्रयोग

मान लीजिए हम वास्तव में, बिना नापे हुए, किसी पेड़ की ऊँचाई ज्ञात करना चाहते हैं। हम भूमि पर पेड़ के आधार बिंदु B से (मान लीजिए) 12 मी की दूरी पर बिंदु A पर खड़े हो जाते हैं (आकृति 13.2)। मान लीजिए, ∠BAC का माप 30° है। हम पेड़ की ऊँचाई BC, त्रिकोणमितीय अनुपात की सहायता से, जैसे कि उपर्युक्त उदाहरण 1 में किया गया था, ज्ञात कर सकते हैं :



आकृति 13.2

$$\frac{BC}{AB} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ मी} = 4\sqrt{3} \text{ मी}$$

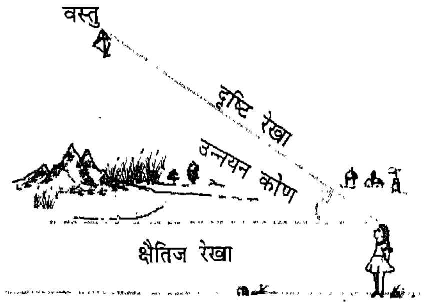
इस प्रकार, त्रिकोणमितीय अनुपातों का उपयोग करते हुए, हम पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कर सकते हैं।

जब कभी किसी अभियंता के सम्मुख नदी की चौड़ाई (या मीनार की ऊँचाई आदि) ज्ञात करने जैसी समस्याएँ आती हैं, जिसे मापने वाले फीते द्वारा मापना साधारणतया संभव नहीं होता है, तब वह एक बड़े त्रिभुज की कल्पना करता है। त्रिभुज की एक भुजा, वह रेखाखंड है जो नदी के एक ओर से दूसरी ओर तक खींचा जाता है (या वह रेखाखंड जो मीनार की चोटी से भूमि तक लंबवत् खींचा जाता है, इत्यादि) और इस त्रिभुज की अन्य दो भुजाओं में से एक भुजा और एक कोण किसी सर्वेक्षण मापक यंत्र द्वारा आसानी से मापा जा सके। एक भुजा और एक कोण के ज्ञात होने पर अभियंता त्रिकोणमितीय अनुपातों की सहायता से अज्ञात भुजा अर्थात् नदी की चौड़ाई या मीनार की ऊँचाई आदि ज्ञात कर सकता है, जैसा कि उपर्युक्त उदाहरण 1 में दर्शाया गया था।

उपर्युक्त प्रकार के प्रश्नों को हल करने से पूर्व, हम पहले कुछ इनसे संबंधित कुछ परिभाषाएँ देंगे।

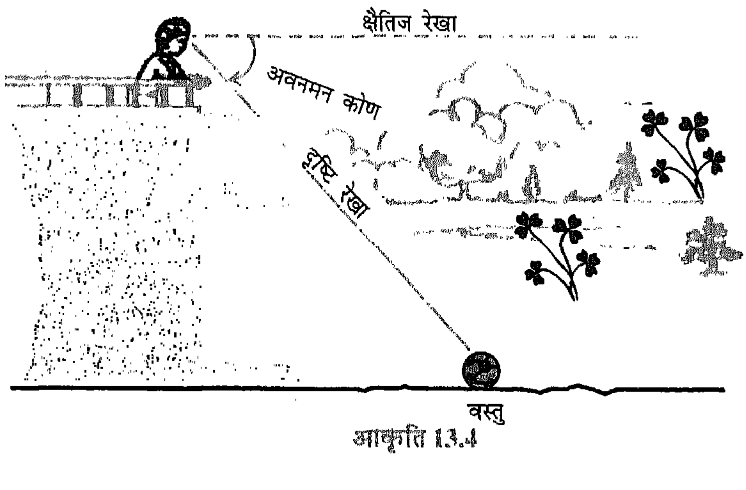
दृष्टि रेखा (Line of Sight) : मान लीजिए भूमि पर खड़े हुए हम किसी वस्तु को देख रहे हैं। स्पष्टत: वस्तु की *दृष्टि रेखा* (*या दर्शन रेखा*) वह रेखा है, जो हमारी आँख से वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ती है (आकृति 13.3)।

उन्नयन कोण (Angle of Elevation) : यदि वस्तु, आँख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो (अर्थात् यदि वस्तु, आँख के स्तर से ऊपर हो), तो हमें वस्तु को देखने के लिए अपने सिर को ऊपर उठाना होगा। इस प्रक्रिया में हमारी आँख एक कोण से घूम जाती है। अपनी आँखों द्वारा वस्तु पर ऐसे बनाए गए कोण को वस्तु का *उन्नयन कोण* कहते हैं (आकृति 13.3)।



आकृति 13.3

अवनमन कोण (Angle of Depression) : मान लीजिए एक लड़का किसी मकान की छत पर खड़ा हुआ है और मकान से कुछ दूरी पर भूमि पर पड़ी हुई एक गेंद को देखता है। इस स्थिति में, गेंद को देखने के लिए उसे अपना सिर नीचे की ओर झुकाना पड़ेगा। इस प्रक्रिया में उसकी आँख एक कोण से घूम जाती है। अपनी आँखों द्वारा वस्तु पर बनाए गए ऐसे कोण को वस्तु का *अवनमन कोण* कहते हैं (आकृति 13.4)।

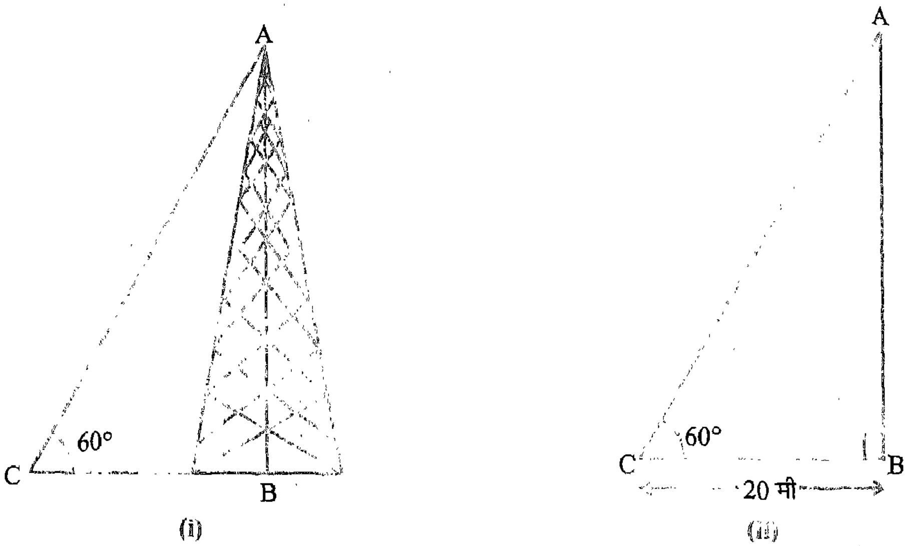


आकृति 13.4

अब हम उपर्युक्त संकल्पनाओं से संबंधित ऊँचाई और दूरी के कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 2. एक मीनार भूमि पर ऊर्ध्वाधर खड़ी है। भूमि पर मीनार के आधार से 20 मी दूरी पर स्थित एक बिंदु से उसकी चोटी का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए A मीनार की चोटी है और B मीनार का आधार बिंदु है। भूमि पर, C वह बिंदु है जहाँ बिंदु A का उन्नयन कोण 60° है (आकृति 13.5)।



आकृति 13.5

तब, $\quad CB = 20$ मी

और $\quad \angle C = 60°$

AB मीनार की ऊँचाई है, जिसे हमें ज्ञात करना है। अब समकोण ΔABC में,

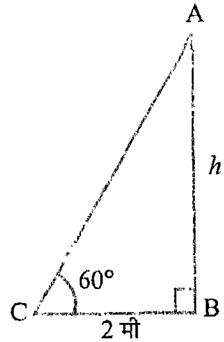
$$\frac{AB}{BC} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ मी}$$

अतः, मीनार की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ मी है।

उदाहरण 3 : एक सीढ़ी एक दीवार पर इस प्रकार टिकी है कि उसका ऊपरी सिरा दीवार के शिखर को छूता है। सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 2 मी की दूरी पर है। सीढ़ी भूमि के साथ 60° का कोण बनाती है (आकृति 13.6)। दीवार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।





(i) (ii)

आकृति 13.6

हल : माना कि दीवार की ऊँचाई h मी है। तब समकोण त्रिभुज ABC [आकृति 13.6 (ii)] से, हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{h}{2} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

या $$h = 2\sqrt{3}$$

अतः, दीवार की ऊँचाई $2\sqrt{3}$ मी या 3.46 मी (लगभग) है।

उदाहरण 4: भूमि पर स्थिर एक ऊर्ध्वाधर बांस के ऊपरी सिरे से एक तनी हुई रस्सी बांधी गई है और रस्सी का दूसरा सिरा भूमि पर स्थिर किया गया है। सरकस का एक कलाकार भूमि से रस्सी पर चढ़ रहा है। बांस की ऊँचाई 12 मी है और रस्सी भूमि से 30° का कोण बनाती है। कलाकार द्वारा बांस के ऊपरी सिरे पर पहुँचने में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

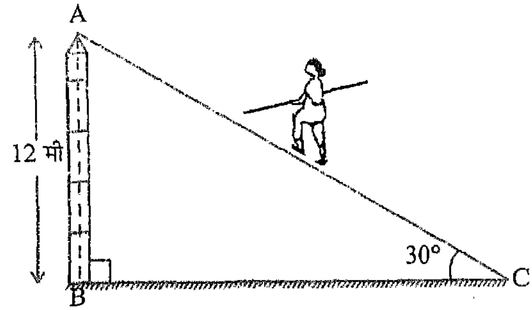
हल : माना कि रस्सी AC की लंबाई (मीटर में) l है। समकोण त्रिभुज ABC (आकृति 13.7) में,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{12}{l}$$

अर्थात् $$\sin 30° = \frac{12}{l}$$

अर्थात् $$\frac{1}{2} = \frac{12}{l}$$

या $$l = 24$$



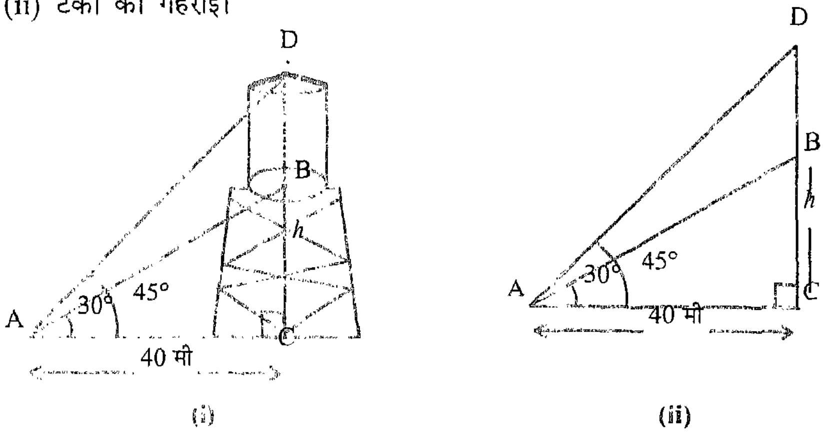
आकृति 13.7

अत:, कलाकार द्वारा तय की गई दूरी 24 मी है।

उदाहरण 5. मीनार के आधार से 40 मी की दूरी पर भूमि पर एक बिंदु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है और मीनार की चोटी पर रखी पानी की टंकी के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 45° है। ज्ञात कीजिए :

(i) मीनार की ऊँचाई।

(ii) टंकी की गहराई।



आकृति 13.8

हल :

(i) माना h (= BC) मीनार की ऊँचाई है (आकृति 13.8)। समकोण त्रिभुज ACB में,

$$\frac{h}{40} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

या $$h = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3}\sqrt{3}$$

अत:, मीनार की ऊँचाई $\frac{40}{3}\sqrt{3}$ मी या 23.1 मी (लगभग) है।

(ii) पानी की टंकी की गहराई BD ज्ञात करने के लिए, हम समकोण Δ ACD [आकृति 13.8 (ii)] में पहले लंबाई CD ज्ञात करते हैं।

अब $$\frac{CD}{AC} = \tan 45^\circ = 1$$

या $$CD = AC = 40 \text{ मी} \qquad (AC = 40 \text{ मी दिया है})$$

अत:, $$CD = 40 \text{ मी}$$

इस प्रकार, पानी की टंकी की गहराई $= BD = CD - CB = (40 - 23.1)$ मी

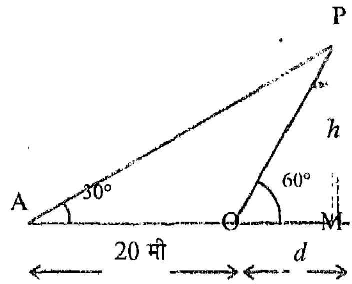
$= 16.9$ मी (लगभग) है।

उदाहरण 6: एक वृक्ष, नदी के एक किनारे पर ऊर्ध्वाधर खड़ा है। वृक्ष के ठीक सम्मुख दूसरे किनारे पर स्थित एक बिंदु से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण $60°$ है। उसी किनारे पर, इस बिंदु से 20 मी पीछे स्थित एक बिंदु से वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण $30°$ है। वृक्ष की ऊँचाई और नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए h (= PM) वृक्ष की मीटरों में ऊँचाई है (आकृति 13.9)। मान लीजिए नदी के दूसरे किनारे पर वृक्ष के ठीक सम्मुख O और A दो बिंदु हैं। OM नदी की चौड़ाई है। माना $OM = d$ मी है। तब आकृति 13.9 में,

$$AO = 20 \text{ मी}, \angle MOP = 60°$$

और $\angle MAP = 30°$



आकृति 13.9

हमें h और d ज्ञात करना है। समकोण त्रिभुज OMP में,

$$\frac{h}{d} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad h = d\sqrt{3} \qquad (1)$$

साथ ही, समकोण त्रिभुज AMP में,

$$\frac{h}{20+d} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

अर्थात् $$h = \frac{20+d}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(1) और (2) से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{20+d}{\sqrt{3}} = d\sqrt{3}$$

या $$3d = 20 + d$$

या $$d = 10$$

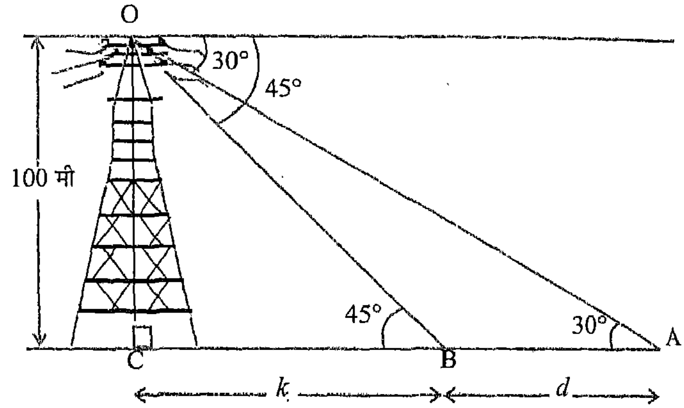
अतः, $$h = d\sqrt{3} = 10\sqrt{3} = 17.3 \text{ (लगभग)}$$

अतः, वृक्ष की ऊँचाई लगभग 17.3 मी और नदी की चौड़ाई 10 मी है।

उदाहरण 7: 100 मी ऊँचे एक प्रकाश स्तंभ की चोटी से एक प्रेक्षक समुद्र में एक जहाज को ठीक अपनी ओर आते हुए देखता है। यदि जहाज का अवनमन कोण $30°$ से बदलकर $45°$ हो जाता है, तो प्रेक्षण की इस अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए A और B जहाज की दो स्थितियाँ हैं। मान लीजिए प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी d मी है, अर्थात् $AB = d$ मी है।

मान लीजिए प्रेक्षक बिंदु O पर है (आकृति 13.10)। स्पष्टत: $OC = 100$ मी है। माना B से C की दूरी k मी है। बिंदु O से A और B के अवनमन कोण क्रमश: $30°$ और $45°$ ज्ञात हैं।



आकृति 13.10

समकोण ΔOCB में,

$$\frac{k}{100} = \cot 45° = 1$$

या $\quad k = 100$

समकोण ΔOCA में,

$$\frac{d+k}{100} = \cot 30° = \sqrt{3}$$

$\therefore \quad d + k = 100\sqrt{3}$

या $\quad d + 100 = 100\sqrt{3}$

या $\quad d = 100\sqrt{3} - 100 = 100(\sqrt{3}-1) = 73.2$ (लगभग)

अत:, जहाज द्वारा A से B तक तय की गई दूरी लगभग 73.2 मी है।

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे हम वस्तु (object) (या प्रेक्षक) की ओर चलते जाते हैं, तो उन्नयन कोण (या अवनमन कोण) का मान बढ़ता जाता है।

प्रश्नावली 13.1

(परिकलन के लिए $\sqrt{2} = 1.41$ तथा $\sqrt{3} = 1.73$ लीजिए)

1. एक मीनार के आधार से 20 मी दूर भूमि पर स्थित एक बिंदु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण $30°$ है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

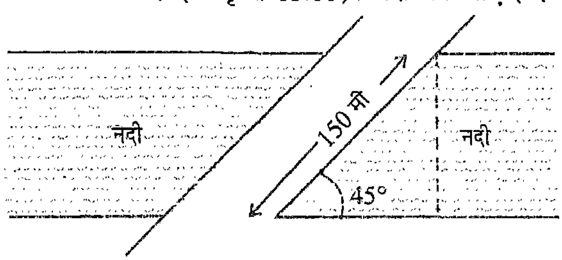
2. एक सीढ़ी को एक दीवार पर लगाने पर उसका ऊपरी सिरा दीवार के शिखर तक पहुँचता है। सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से 1.5 मी क़ी दूरी पर है और सीढ़ी भूमि के साथ $60°$ का कोण बनाती है। दीवार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

3. बिजली का एक खंभा 10 मी ऊँचा है। खंभे को सीधा लंबवत् रखने के लिए स्टील के तार का एक सिरा खंभे की चोटी से बंधा है और दूसरा, भूमि पर स्थिर किया गया है। यदि स्टील का तार खंभे के आधार बिंदु से होकर जाने वाले क्षैतिज के साथ $45°$ का कोण बनाए, तो स्टील के तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

4. मौसम विज्ञान भूमि केन्द्र से एक केबल द्वारा एक गुब्बारा संयोजित है। केबल की लंबाई 215 मी है तथा यह क्षैतिज से $60°$ के कोण पर नत है। यह मानते हुए कि केबल में कोई ढील नहीं है, भूमि से गुब्बारे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. सूर्य का उन्नयन कोण (उन्नतांश, altitude) ज्ञात कीजिए, जब किसी ऊर्ध्वाधर खंभे की छाया की लंबाई खंभे की ऊँचाई के बराबर है।

6. नदी पर बने किसी पुल के उस भाग की लंबाई, जो ठीक नदी के ऊपर है, 150 मी है तथा पुल नदी के किनारे से $45°$ का कोण बनाता है (आकृति 13.11)। नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।



आकृति 13.11

7. 30 मी ऊँची मीनार से 28.5 मी दूर एक प्रेक्षक, जिसकी ऊँचाई 1.5 मी है, खड़ा है। प्रेक्षक की आँख से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

8. किसी मीनार के आधार से पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण $60°$ है और पहाड़ी के आधार से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण $30°$ है। यदि मीनार की ऊँचाई 50 मी हो, तो पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. एक सड़क, 50 मी ऊँची मीनार के आधार तक, सीधी जाती है। मीनार की चोटी से सड़क पर खड़ी दो कारों के अवनमन कोण क्रमश: $30°$ और $60°$ हैं। दोनों कारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए और बताइए कि प्रत्येक कार मीनार के आधार से कितनी दूरी पर है।

10. भूमि पर एक बिंदु P से, 10 मी ऊँचे एक भवन की चोटी और एक हेलीकॉप्टर, जो भवन की चोटी के ठीक ऊपर कुछ ऊँचाई पर जा रहा है, के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 60° हैं। भूमि से हेलीकॉप्टर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

11. भूमि पर एक बिंदु से, एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ओर 30 मी चलने के पश्चात् मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

12. 100 मी चौड़ी एक नदी के मध्य में एक छोटा सा टापू है। इस टापू पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिंदु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि P, Q और वृक्ष एक रेखा में हैं। यदि P और Q से वृक्ष की चोटी के उन्नयन कोण 30° और 45° हों, तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

13. एक मीनार की चोटी से, 7 मी ऊँचे एक भवन के शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

14. 100 मी ऊँची एक मीनार की चोटी और उसके आधार से, एक चट्टान की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। चट्टान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

15. एक मीनार समतल भूमि पर खड़ी है। सूर्य के उन्नतांश (सूर्य का उन्नयन कोण) 30° पर मीनार की छाया, सूर्य के उन्नतांश 60° पर मीनार की छाया से 45 मी अधिक है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

16. 150 मी ऊँचे एक प्रकाश स्तंभ की चोटी से देखने पर, उसकी ओर आ रहे दो जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि एक जहाज ठीक दूसरे के पीछे हो, तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

17. 5 मी ऊँची मीनार की चोटी पर एक ध्वज-दण्ड लगा हुआ है। भूमि पर स्थित किसी बिंदु से ध्वज-दण्ड के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60° है और इसी बिंदु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 45° है। ध्वज-दण्ड की लंबाई ज्ञात कीजिए।

18. 100 मी चौड़ी सड़क के दोनों किनारों पर दो बराबर ऊँचाई के खंभे आमने-सामने स्थित हैं। सड़क के बीच में किसी बिंदु से खंभों के ऊपरी सिरों के उन्नयन कोण 30° और 60° हैं। बिंदु की स्थिति और खंभों की ऊँचाइयाँ ज्ञात कीजिए।

19. किसी मीनार के आधार से a और b की दूरियों पर एक ही रेखा में स्थित दो बिंदुओं क्रमश: P और Q से देखने पर, मीनार के ऊपरी सिरे के उन्नयन कोण पूरक पाए जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

20. क्षैतिज तल पर स्थित एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है तथा उसके शिखर पर 7 मी लंबाई का एक ध्वज दण्ड लगा है। तल पर स्थित किसी बिंदु से ध्वज दण्ड के आधार तथा ऊपरी सिरे के उन्नयन कोण क्रमश: 30° और 45° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

21. 50 मी ऊँची पहाड़ी के शिखर से किसी मीनार की चोटी और आधार के अवनमन कोण क्रमश: 30° और 45° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

22. दो मीनारों के बीच की क्षैतिज दूरी 140 मी है। दूसरी मीनार की चोटी से पहली मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। यदि दूसरी मीनार की ऊँचाई 60 मी है, तो पहली मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

23. 4000 मी की ऊँचाई पर उड़ते हुए जहाज के ठीक नीचे जिस क्षण दूसरा जहाज आता है, उसी क्षण भूमि पर किसी बिंदु से इन जहाजों के उन्नयन कोण क्रमश: 60° और 45° हैं। उस क्षण पर दोनों जहाजों के बीच की ऊर्ध्वाधर दूरी ज्ञात कीजिए।

24. पानी की सतह से 10 मी ऊपर किसी जहाज की छत पर खड़ा एक व्यक्ति किसी पहाड़ी के शिखर का उन्नयन कोण 60° पाता है और पहाड़ी के आधार का अवनमन कोण 30° पाता है। पहाड़ी से जहाज की दूरी और पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

25. आँधी चलने से दो भागों में टूटे हुए एक वृक्ष का ऊपरी भाग भूमि से 30° का कोण बनाता है। वृक्ष का ऊपरी सिरा जिस स्थान पर भूमि को छूता है वह स्थान वृक्ष के आधार-बिंदु से 10 मी की दूरी पर है। वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

26. पहाड़ी पर खड़ा एक व्यक्ति एक नाव को देखता है, जिसका उस समय अवनमन कोण 30° है, और यह नाव समुद्र के किनारे उस व्यक्ति के ठीक नीचे के स्थान की ओर आ रही है। नाव समान चाल से आ रही है। 6 मिनट पश्चात् उसका अवनमन कोण 60° हो जाता है। नाव को किनारे तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

अध्याय 14

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

14.1 भूमिका

आप विभिन्न ठोस आकृतियों यथा घनाभ, घन, लंब वृत्तीय बेलन, लंब वृत्तीय शंकु, गोला आदि से पहले से ही परिचित हैं और इन ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के विषय में भी पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं।

दैनिक जीवन में हमको अनेक ऐसी ठोस वस्तुएँ देखने को मिलती हैं जो कि या तो इनके अंश (भाग) से या इनके संयोजन से बनी होती हैं। उदाहरण के लिए, एक बाल्टी या शीशे का गिलास एक लंब वृत्तीय शंकु का भाग है। इसी प्रकार, एक बेलनाकार आधार का लंब शंक्वाकार सर्कस का तंबू एक लंब वृत्तीय बेलन तथा एक लंब वृत्तीय शंकु के संयोजन से बनता है। इस अध्याय में, हम एक ठोस आकृति के दूसरी आकृति में रूपांतरण के अध्ययन के साथ ही साथ, ठोस आकृतियों के संयोजनों तथा उनके अंशों, जिनमें शंकु-छिन्नक सम्मिलित है, के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों के विषय में पढ़ेंगे। आप विभिन्न ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों और आयतनों से संबंधित उन सूत्रों को पुनः स्मरण कीजिए जो सारणी 14.1 में दिए गए हैं और प्रश्नावली 14.1 के प्रश्नों को हल कीजिए।

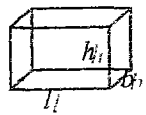
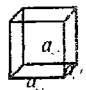
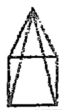
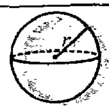
इस अध्याय में, हम परिकलनों के सरलीकरण के लिए, $\pi = \frac{22}{7}$ लेंगे, जब तक कि कोई अन्य मान लेने के लिए न कहा गया हो।

पुनर्विलोकन हेतु प्रश्नावली 14.1

1. एक भूमिगत जलाशय घनाभ के आकार का है जिसकी विमाएँ 48 मी, 36 मी और 28 मी हैं। जलाशय का आयतन ज्ञात कीजिए।

2. एक घन का आयतन 1728 सेमी^{3} है।
(i) उसकी कोर (ii) उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल
ज्ञात कीजिए।

सारणी 14.1

ठोस आकृति का नाम	आकृति	पार्श्व / वक्र पृष्ठ	संपूर्ण पृष्ठ	आयतन	नामांकन
घनाभ		$2h\,(l+b)$	$2(lb+bh+hl)$	lbh	l : लंबाई b : चौड़ाई h : ऊँचाई
घन		$4a^2$	$6a^2$	a^3	a : घन की भुजा या कोर
लंब प्रिज्म		आधार का परिमाप × ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ + 2 (एक सिरे का क्षेत्रफल)	आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई	–
लंब वृत्तीय बेलन		$2\pi rh$	$2\pi r\,(r+h)$	$\pi r^2 h$	r : आधार की त्रिज्या h : ऊँचाई
लंब पिरामिड		$\frac{1}{2}$ (आधार का परिमाप) × तिर्यक ऊँचाई	पार्श्व पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल	$\frac{1}{3}$ (आधार का क्षेत्रफल) × ऊँचाई	–
लंब वृत्तीय शंकु		πrl	$\pi r\,(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$	r : आधार की त्रिज्या h : ऊँचाई l : तिर्यक ऊँचाई
गोला		$4\pi r^2$	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	r : त्रिज्या
गोलार्ध		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$	r : त्रिज्या

3. एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 28 सेमी और उसकी ऊँचाई 21 सेमी है। उसका
(i) वक्र पृष्ठ (ii) संपूर्ण पृष्ठ (iii) आयतन
ज्ञात कीजिए।

4. एक बर्तन, जो लंब वृत्तीय बेलन के आकार का है, का आयतन 448 π सेमी³ है और उसकी ऊँचाई 7 सेमी है। उसके आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

5. एक लंब वृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या और उसकी ऊँचाई क्रमशः 7 सेमी और 24 सेमी हैं। शंकु का आयतन और संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक लंब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल [illegible] सेमी² है। यदि उसके आधार की त्रिज्या 20 सेमी हो, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

7. धातु के एक गोले का व्यास 8.4 सेमी है। उसका आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. यदि एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 616 सेमी² हो, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

9. एक खोखले अर्धगोलीय बर्तन के अंतः और बाह्य व्यास क्रमशः 42 सेमी और 45.5 सेमी हैं। उसकी धारिता तथा उसका बाहरी वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

10. एक ठोस अर्धगोलीय खिलौने की त्रिज्या 3.5 सेमी है। उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

बहुधा हमें एक ठोस को दूसरे रूप के ठोस में परिवर्तित करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, एक धातुयी गोले को पिघलाकर प्रायः बेलनाकार तार में बदलना, कुएँ से खोदी गई मिट्टी जो मूल रूप में लंब वृत्तीय बेलन के आकार की होती है, उसको कुएँ के चारों ओर समान रूप से फैलाने से बना चबूतरा जो एक बेलनाकार खोल (shell) के आकार का होता है, इत्यादि। इस प्रकार की स्थितियों में हम पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन का परिकलन उदाहरणों से समझाएँगे।

धातु के एक गोले का व्यास 6 सेमी है। गोले को पिघलाकर एक समान वृत्तीय अनुप्रस्थ-परिच्छेद वाला तार बनाया गया है। यदि तार की लंबाई 36 मी हो, तो उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

धातु के गोले का व्यास 6 सेमी है। इसलिए धातु के गोले की त्रिज्या 3 सेमी है। अब मान लीजिए कि तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद (काट) की त्रिज्या r सेमी है। चूंकि धातु का गोला बेलनाकार

तार में परिवर्तित कर दिया गया है, अतः उनके आयतन समान होंगे। इस प्रकार,

$$\frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = \pi \times r^2 \times 3600$$

या $$4 \times 9\pi = 3600 \pi r^2$$

या $$r^2 = 0.01$$

या $$r = 0.1$$

अतः, अनुप्रस्थ-परिच्छेद की त्रिज्या 1 मिमी है।

उदाहरण 2: एक शंकु, जिसकी ऊँचाई 24 सेमी और जिसके आधार की त्रिज्या 6 सेमी है, प्रतिमा बनाने वाली चिकनी मिट्टी से बनाया गया है। एक बच्चा उसको पुनः गोले के आकार का बनाता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$ सेमी³

यदि गोले की त्रिज्या r हो, तो इसका आयतन $\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ सेमी³ है।

चूंकि चिकनी मिट्टी का आयतन शंकु और गोले के रूप में समान है,

अतः $$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 24$$

या $$r^3 = 3 \times 3 \times 24$$

या $$r^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2$$

या $$r = 3 \times 2$$

अर्थात् $$r = 6$$

इसलिए, गोले की त्रिज्या 6 सेमी है।

उदाहरण 3: एक कुआँ, जिसका व्यास 7 मीटर है, 22.5 मीटर गहरा खोदा गया है और खोदी गई मिट्टी से उसके चारों ओर 10.5 मी चौड़ा एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: कुएँ की त्रिज्या $(r_1) = \frac{7}{2}$ मी $= 3.5$ मी

खोदी गई मिट्टी का आयतन $= \left(\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{45}{2}\right)$ मी^{3} $= \frac{3465}{4}$ मी^{3}

चबूतरे की बाहरी त्रिज्या $(r_2) = 3.5$ मी $+ 10.5$ मी $= 14$ मी

चबूतरे के आधार का क्षेत्रफल

= बाह्य वृत्त का क्षेत्रफल – अंत: वृत्त का क्षेत्रफल

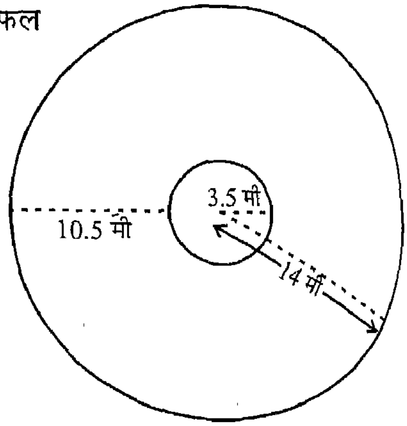
$= \pi\,(r_2^{\,2} - r_1^{\,2})$

$= \pi\,(r_2 + r_1)\,(r_2 - r_1)$

$= \frac{22}{7}\,(14 + 3.5)\,(14 - 3.5)$ मी^{2}

$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{21}{2}$ मी^{2}

$= \frac{1155}{2}$ मी^{2}



आकृति 14.1

चबूतरे की ऊँचाई

$= \dfrac{\text{चबूतरे का आयतन, अर्थात् खोदी गई मिट्टी का आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}}$

$= \left(\frac{3465}{4} \div \frac{1155}{2}\right)$ मी

$= \left(\frac{3465}{4} \times \frac{2}{1155}\right)$ मी

$= \frac{3}{2}$ मी

$= 1.5$ मी

एक आयताकार खेत की लंबाई 20 मी और चौड़ाई 14 मी है। खेत के एक कोने में 10 मी गहरा, 7 मी व्यास का एक कुआँ खोदा गया और कुएँ से निकली मिट्टी को खेत के

शेष भाग में समान रूप से फैला दिया गया है। ज्ञात कीजिए कि खेत का तल किना ऊँचा उठ गया है।

हल : खोदी गई मिट्टी का आयतन $= \left(\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 10\right)$ मी^{3}

$= 385$ मी^{3}

खेत का क्षेत्रफल $= 20 \times 14$ मी^{2}

$= 280$ मी^{2}

खेत के शेष भाग का क्षेत्रफल

= खेत का क्षेत्रफल – कुएँ के आधार का क्षेत्रफल

$= 280$ मी$^2 - \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ मी^{2}

$= \left(280 - \frac{77}{2}\right)$ मी^{2}

$= \frac{560 - 77}{2}$ मी^{2}

$= \frac{483}{2}$ मी^{2}

$= 241.5$ मी^{2}

मान लीजिए, खेत का तल h मीटर ऊँचा उठ गया है।

$\therefore$ ऊँचे उठे खेत का आयतन $= (241.5)\, h$ मी^{3}

क्योंकि ऊँचे उठे हुए खेत का आयतन = खोदी गई मिट्टी का आयतन,

इसलिए $(241.5)\, h = 385$

या $h = \frac{385}{241.5}$

$= \frac{3850}{2415}$

$= 1.6$ लगभग

अतः, खेत का तल लगभग 1.6 मी ऊँचा उठ गया है।

उदाहरण 5 : तांबे की एक छड़, जिसका व्यास 1 सेमी और लंबाई 8 सेमी है, को समान मोटाई के 18 मी लंबे तार में परिवर्तित किया जाता है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल : छड़ का आयतन $= \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 8$ सेमी^{3}

$= 2\pi$ सेमी^{3}

उसी आयतन के तार की लंबाई $= 18$ मी

$= 1800$ सेमी

यदि तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद (cross-section) की त्रिज्या r हो, तो उसका

आयतन $= \pi \times r^2 \times 1800$ सेमी^{3}

इसलिए $\pi \times r^2 \times 1800 = 2\pi$

या $r^2 = \frac{1}{900}$

या $r = \frac{1}{30}$

अर्थात् तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद की त्रिज्या $= \frac{1}{30}$ सेमी

अतः, तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद का व्यास (अर्थात् तार की मोटाई) $= \frac{1}{15}$ सेमी

$= 0.67$ मिमी (लगभग)

उदाहरण 6 : पानी से भरी हुई एक अर्धगोलाकार टंकी एक नल (पाइप) द्वारा $3\frac{4}{7}$ लीटर प्रति सेकंड की दर से खाली की जाती है। टंकी को आधा खाली करने में कितना समय लगेगा, यदि टंकी का व्यास 3 मीटर है?

हल : अर्धगोलाकार टंकी की त्रिज्या $= \frac{3}{2}$ मी

$\therefore$ टंकी का आयतन $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$ मी^{3}

$$= \frac{99}{14} \text{ मी}^3$$

$$= \frac{99000000}{14} \text{ सेमी}^3$$

इसलिए वह आयतन जो खाली करना है $= \frac{1}{2} \times \frac{99000000}{14}$ सेमी^{3}

$$= \frac{99000000}{28} \times \frac{1}{1000} \text{ लीटर}$$

$$= \frac{99000}{28} \text{ लीटर}$$

क्योंकि $\frac{25}{7}$ लीटर पानी 1 सेकंड में बाहर निकाला जाता है, इसलिए $\frac{99000}{28}$ लीटर पानी $\frac{99000}{28} \times \frac{7}{25}$ सैकंडों में, अर्थात् 16.5 मिनटों में बाहर निकलेगा।

उदाहरण 7 : 14 सेमी व्यास के एक पाइप द्वारा 5 किमी प्रति घंटे के वेग से बहने वाला पानी एक आयताकार टंकी में गिर रहा है, जो 50 मी लंबी और 44 मी चौड़ी है। टंकी में पानी का स्तर 7 सेमी ऊपर उठने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए।

हल : बेलनाकार पाइप द्वारा 5 किमी (5000 मी) के वेग से एक घंटे में बहने वाले पानी का आयतन

$$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 5000 \text{ मी}^3 \qquad \left[\text{क्योंकि त्रिज्या} = 7 \text{ सेमी} = \frac{7}{100}\text{मी}\right]$$

$$= 77 \text{ मी}^3$$

इस प्रकार, 1 घंटे में 77 मी^{3} पानी टंकी में भरेगा। क्योंकि टंकी में पानी के स्तर को 7 सेमी, अर्थात् $\frac{7}{100}$ मी ऊपर उठना है, अत: टंकी में आवश्यक पानी का आयतन

$$= 50 \times 44 \times \frac{7}{100} \text{ मी}^3$$

$$= 154 \text{ मी}^3$$

क्योंकि 77 मी ^{3} पानी टंकी में 1 घंटे में भरता है, इसलिए 154 मी ^{3} पानी टंकी में $\frac{154}{77}$ घंटे, अर्थात् 2 घंटे में भरेगा।

अत:, टंकी में पानी का स्तर 2 घंटे में 7 सेमी उठ जाएगा।

प्रश्नावली 14.2

1. सीसे के एक ठोस गोले, जिसकी त्रिज्या 8 सेमी है, से 1 सेमी त्रिज्या वाली कितनी गोलियाँ बनाई जा सकती हैं?

2. सीसे के एक गोलीय खोल (shell) को, जिसका बाह्य व्यास 18 सेमी है, पिघलाकर पुन: एक लंब वृत्तीय बेलन के रूप में ढाला जाता है, जिसकी ऊँचाई 8 सेमी और आधार का व्यास 12 सेमी है। खोल का आंतरिक व्यास ज्ञात कीजिए।

3. धातु के एक गोले का व्यास 6 सेमी है। उसको पिघलाकर एक तार के रूप में परिवर्तित किया गया है, जिसके अनुप्रस्थ-परिच्छेद का व्यास 0.2 सेमी है। तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

4. यदि एक तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद का व्यास 5 % कम कर दिया जाए, तो उसकी लंबाई कितने प्रतिशत बढ़ जाएगी ताकि तार का आयतन अपरिवर्तित रहे?

5. एक शंकु 8.4 सेमी ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 2.1 सेमी है। उसे पिघलाकर एक गोले के रूप में ढाला जाता है। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. धातु के एक गोले की अंत: और बाह्य त्रिज्याएँ क्रमश: 3 सेमी और 5 सेमी हैं। उसको पिघलाकर $10\frac{2}{3}$ सेमी ऊँचाई वाला एक ठोस लंब वृत्तीय बेलन बनाया जाता है। बेलन के आधार का व्यास ज्ञात कीजिए।

7. सीसे के 3 सेमी व्यास वाले एक गोले को पिघलाकर तीन गोलियों में परिवर्तित किया जाता है। इनमें से दो गोलियों के व्यास 1 सेमी और 1.5 सेमी हैं। तीसरी गोली का व्यास ज्ञात कीजिए।

8. 2 मी व्यास वाला 14 मी गहरा एक कुआँ खोदा गया है। उससे निकली हुई मिट्टी को कुएँ के चारों ओर 5 मी चौड़ाई तक समान रूप से फैलाकर एक चबूतरा बनाया गया है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

9. एक कुआँ जिसका व्यास 3 मी है, 14 मी गहरा खोदा जाता है। कुएँ से निकली मिट्टी को समान रूप से 4 मी चौड़ाई तक उसके चारों ओर फैलाकर एक चबूतरा बनाया जाता है। चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10. 50 वृत्ताकार प्लेटों, जिसमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 सेमी और मोटाई $\frac{1}{2}$ सेमी है, को एक दूसरे के ऊपर रखकर एक ठोस वृत्ताकार बेलन बनाया जाता है। इस प्रकार बने बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

11. 5 सेमी व्यास वाला एक गोला, पानी से आंशिक भरे एक बेलनाकार बर्तन में डाला जाता है। बर्तन के आधार का व्यास 10 सेमी है। यदि गोला पूर्णतया पानी में डूबा हो, तो पानी का स्तर कितना ऊपर उठेगा?

12. एक आयताकार तालाब, जो 80 मी लंबा और 50 मी चौड़ा है, में 500 व्यक्ति एक साथ डुबकी लगाते हैं। तालाब में पानी का स्तर कितना ऊँचा उठेगा, यदि एक व्यक्ति द्वारा पानी का औसत विस्थापन 0.04 मी^{3} हो?

13. एक अर्धगोलाकार कटोरी, जिसकी आंतरिक त्रिज्या 9 सेमी है, द्रव से भरी है। इस द्रव को बेलनाकार छोटी बोतलों में भरना है, जबकि प्रत्येक बोतल के आधार का व्यास 3 सेमी और ऊँचाई 4 सेमी है। कटोरी को खाली करने के लिए कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

14. एक घन के आयतन और उस गोले के आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिए, जो घन में ठीक समा जाता है।

15. 7 सेमी भुजा वाले एक घन में से एक बड़ा से बड़ा गोला काटा गया है। इस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

16. एक शंक्वाकार फ्लास्क पानी से पूरा भरा हुआ है। फ्लास्क की आधार-त्रिज्या r और ऊँचाई h है। पानी एक बेलनाकार फ्लास्क में उड़ेला जाता है, जिसकी आधार-त्रिज्या mr है। बेलनाकार फ्लास्क में पानी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

17. 7 सेमी अंत: व्यास वाली वृत्तीय नली द्वारा पानी बाहर निकाला जाता है। यदि नली में पानी का बहाव 72 सेमी प्रति सेकंड हो, तो एक घंटे में कितना पानी बाहर निकाला जाता है?

18. एक वृत्तीय पाइप (नली), जिसका आंतरिक व्यास 2 सेमी है, के द्वारा पानी 0.7 मी प्रति सेकंड के वेग से एक बेलनाकार टंकी, जिसके आधार की त्रिज्या 40 सेमी है, में भरा जाता है। एक घंटे में पानी का स्तर टंकी में कितना ऊँचा उठेगा?

19. 22 मी × 20 मी की छत से वर्षा का जल नाली द्वारा बेलनाकार बर्तन में, जिसके आधार का व्यास 2 मी और ऊँचाई 3.5 मी है, गिरता है। वर्षा की मात्रा सेंटीमीटरों में ज्ञात कीजिए, जबकि बर्तन पूरा भर गया हो।

20. एक आयताकार टंकी, जो 15 मी लंबी और 11 मी चौड़ी है, में उस पूरे द्रव को भरना है जिससे एक बेलनाकार टंकी पूरी भरी हुई है। बेलनाकार टंकी का अंत: व्यास 21 मी और लंबाई 5 मी है। आयताकार टंकी की वह कम से कम ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जो इस उद्देश्य को पूरा करती हो।

21. उस बेलनाकार टंकी की गहराई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 28 मी है, यदि उसकी धारिता उस आयताकार टंकी के बराबर हो, जिसकी माप 28 मी × 16 मी × 11 मी हैं।

22. एक नहर, जो 30 डेमी चौड़ी और 12 डेमी गहरी है, में पानी 10 किमी प्रति घंटे की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में कितने क्षेत्र की सिंचाई होगी, यदि सिंचाई हेतु 8 सेमी खड़े पानी की आवश्यकता हो?

23. एक 5 मिमी व्यास वाले बेलनाकार पाइप में पानी 10 मी प्रति मिनट की चाल से बह रहा है। इससे एक शंक्वाकार बर्तन को भरने में कितना समय लगेगा, जिसके आधार का व्यास 40 सेमी और गहराई 24 सेमी है?

[**संकेत** : एक मिनट में बाहर निकलने वाले पानी का आयतन $= \frac{22}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 1000$ सेमी^{3}]

24. एक अर्धगोलाकार टंकी, जिसकी त्रिज्या $1\frac{3}{4}$ मी है, पानी से पूरी भरी है। वह एक पाइप से जुड़ी है जो उसको 7 लीटर प्रति सेकंड की दर से खाली करता है। टंकी को पूरा खाली करने में कितना समय लगेगा?

14.3 संयुक्त ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, दैनिक जीवन में हम बहुत सी ऐसी ठोस आकृतियों को पाते हैं जो बहुत-सी मूल ठोस आकृतियों, जैसे लंब वृत्तीय बेलन, लंब वृत्तीय शंकु, गोला, गोलार्ध, आदि के संयोजनों से बनती हैं। एक सर्कस का तंबू, जो बेलनाकार भाग के ऊपर शंक्वाकार या गोलार्ध छत रखकर बना हो; एक खिलौना, जो गोलार्ध पर शंकु रखने से बनी आकृति के आकार का हो; एक बेलनाकार ठोस जिसके सिरों पर गोलार्ध हो, इत्यादि ठोस आकृतियों के संयोजनों के उदाहरण हैं। इस अनुच्छेद में, हम ठोस आकृतियों के संयोजनों का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन आगे दिए उदाहरणों के अनुसार ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 8 : एक खिलौना, एक अर्धगोले पर उसी त्रिज्या का शंकु रखने से बना है। शंक्वाकार भाग के आधार का व्यास 6 सेमी और ऊँचाई 4 सेमी है। खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए)

हल : अर्धगोले की त्रिज्या (जो शंकु के आधार की त्रिज्या के बराबर है)

$$= \frac{1}{2} \times 6 \text{ सेमी} = 3 \text{ सेमी}$$

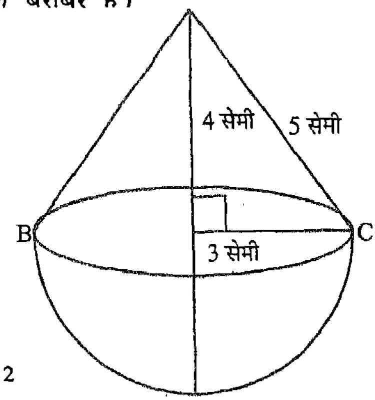
अब, शंकु की तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{3^2 + 4^2}$ सेमी = 5 सेमी

खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंक्वाकार भाग का वक्र पृष्ठ + अर्धगोले का वक्र पृष्ठ (आकृति 14.2)

$$= (\pi \times 3 \times 5 + 2\pi \times 3^2) \text{ सेमी}^2$$

$$= 3.14 \times 3\,(5 + 6) \text{ सेमी}^2$$

$$= 103.62 \text{ सेमी}^2$$



आकृति 14.2

उदाहरण 9 : एक ठोस, एक बेलन तथा दो अर्धगोलाकार सिरों का बना है। यदि ठोस की संपूर्ण लंबाई 104 सेमी और प्रत्येक अर्धगोलाकार सिरे की त्रिज्या 7 सेमी हो, तो एक रुपया प्रति डेमी² की दर से ठोस के पृष्ठ को पालिश करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि बेलन की ऊँचाई h सेमी है (आकृति 14.2)। तब

$$h + 7 + 7 = 104$$

या $$h = 90$$

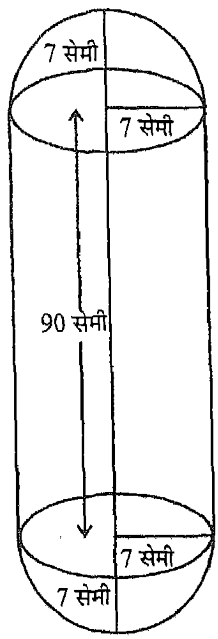
ठोस का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2 \times \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठ} + \text{बेलन का वक्र पृष्ठ}$$

$$= \left(2 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 90\right) \text{ सेमी}^2$$

$$= (616 + 3960) \text{ सेमी}^2$$

$$= 4576 \text{ सेमी}^2$$



आकृति 14.3

ठोस के पृष्ठ को पालिश कराने का व्यय

$$= \frac{4576 \times 1}{100} \text{ रु}$$

$$= 45.76 \text{ रु}$$

उदाहरण 10 : 3.5 मी लंबे सीसे के एक पाइप (नली) का द्रव्यमान निकालिए, यदि पाइप का बाहरी व्यास 2.4 सेमी और धातु की मोटाई 2 मिमी हो तथा 1 सेमी^{3} सीसे का द्रव्यमान 11.4 ग्राम हो।

हल : पाइप एक खोखला बेलन है जिसका आधार एक वृत्ताकार वलय (ring) है।

बाहरी वृत्त की त्रिज्या (R) $= \frac{1}{2} \times 2.4$ सेमी

$= 1.2$ सेमी

भीतरी वृत्त की त्रिज्या $(r) = 1.2$ सेमी $- 0.2$ सेमी

$= 1$ सेमी

वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल $= \pi (R^2 - r^2)$

$= \pi (R + r)(R - r)$

$= \frac{22}{7}(1.2+1)(1.2-1)$ सेमी^{2}

$= \frac{22}{7} \times 2.2 \times 0.2$ सेमी^{2}

$= \frac{9.68}{7}$ सेमी^{2}

$\therefore$ धातु का आयतन $= \frac{9.68}{7} \times 350$ सेमी^{3}

$= 484$ सेमी^{3}

$\therefore$ धातु का द्रव्यमान $= 484 \times 11.4$ ग्रा [1 सेमी^{3} सीसे का द्रव्यमान $= 11.4$ ग्रा]

$= 5517.6$ ग्रा $= 5.518$ किग्रा (लगभग)

अतः, सीसे के पाइप का द्रव्यमान लगभग 5.518 किग्रा है।

उदाहरण 11 : एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 15 सेमी और 20 सेमी हैं, को उसके कर्ण के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार बने हुए द्विशंकु का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल : मान लीजिए ΔABC समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है और उसकी भुजाओं AB और AC के माप क्रमशः 15 सेमी और 20 सेमी हैं (आकृति 14.4)।

भुजा BC (कर्ण) की लंबाई = $\sqrt{15^2+20^2}$ सेमी = 25 सेमी

यहाँ AO (या A′O) उस द्विशंकु, जो समकोण त्रिभुज को BC के परितः घुमाने से बना है, के उभयनिष्ठ आधार की त्रिज्या है।

शंकु BAA′ की ऊँचाई BO और तिर्यक (तिरछी) ऊँचाई 15 सेमी है।

शंकु CAA′ की ऊँचाई CO और उसकी तिर्यक ऊँचाई 20 सेमी है।

अब, $\Delta AOB \sim \Delta CAB$ (कोण-कोण समरूपता)

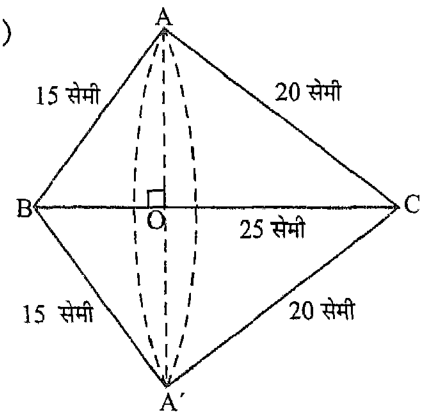
अतः, $\dfrac{AO}{20} = \dfrac{15}{25}$

इससे प्राप्त होता है: $AO = \dfrac{20 \times 15}{25}$ सेमी = 12 सेमी

साथ ही, $\dfrac{BO}{15} = \dfrac{15}{25}$

इससे मिलता है : $BO = \dfrac{15 \times 15}{25}$ सेमी = 9 सेमी

इस प्रकार, CO = 25 सेमी − 9 सेमी = 16 सेमी



आकृति 14.4

अब द्विशंकु का आयतन = $\left(\dfrac{1}{3} \times 3.14 \times 12^2 \times 9 + \dfrac{1}{3} \times 3.14 \times 12^2 \times 16\right)$ सेमी^{3}

$= \dfrac{3.14}{3} \times 12^2 \times (9+16)$ सेमी^{3}

$= 3.14 \times 1200$ सेमी^{3}

$= 3768$ सेमी^{3}

द्विशंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $(3.14 \times 12 \times 15 + 3.14 \times 12 \times 20)$ सेमी^{2}

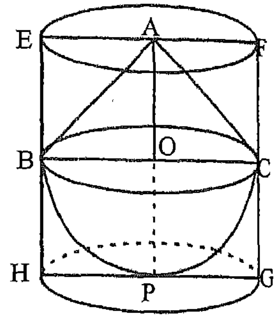
$= 3.14 \times 12 \times (15 + 20)$ सेमी^{2}

$= 1318.8$ सेमी^{2}

उदाहरण 12 : एक खिलौना एक अर्धगोले पर रखे एक लंब वृत्तीय शंकु के आकार का है। शंकु की ऊँचाई 2 सेमी तथा आधार का व्यास 4 सेमी है। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस ठोस के परिगत हो, तो वह ठोस की तुलना में कितना अधिक स्थान घेरेगा?

हल : मान लीजिए BPC अर्धगोला है और ABC गोलार्ध पर रखा शंकु है (आकृति 14.5)।

गोलार्ध (तथा शंकु) की त्रिज्या $= \frac{1}{2} \times 4$ सेमी $= 2$ सेमी



आकृति 14.5

अब, मान लीजिए लंब वृत्तीय बेलन EFGH ठोस के परिगत है।

लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या = HP = BO = 2 सेमी

बेलन की ऊँचाई = AP = AO + OP = 2 सेमी + 2 सेमी = 4 सेमी

अब, लंब वृत्तीय बेलन का आयतन - ठोस का आयतन

$$= \left[\pi \times 2^2 \times 4 - \left(\frac{2}{3} \times \pi \times 2^3 + \frac{1}{3} \times \pi \times 2^3\right)\right] \text{सेमी}^3$$

$= (16\pi - 8\pi)$ सेमी^{3}

$= 8\pi$ सेमी^{3}

अत:, लंब वृत्तीय बेलन, ठोस की तुलना में 8π सेमी^{3} अधिक स्थान घेरता है।

14.4 लंब वृत्तीय शंकु का छिन्नक

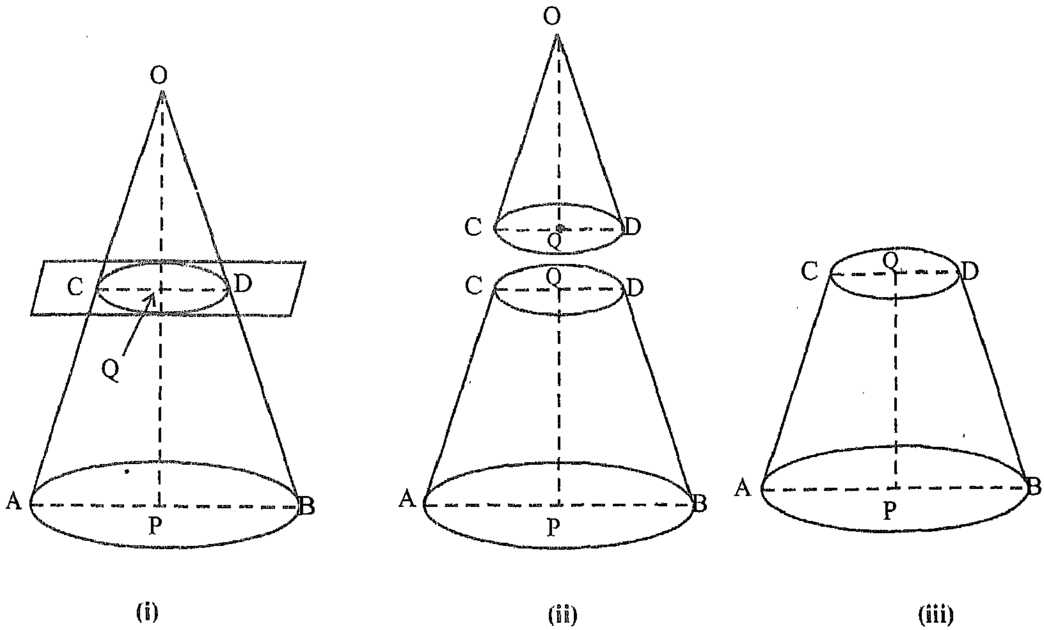
हम अपने दैनिक जीवन में बहुत-सी ऐसी ठोस आकृतियों को देखते हैं जो किसी सामान्य ठोस के भाग होती हैं। उदाहरण के लिए, एक बाल्टी या शीशे का गिलास एक लंब वृत्तीय शंकु का भाग है।

एक लंब वृत्तीय शंकु को उसके आधार के समांतर एक तल द्वारा काटे गए अनुप्रस्थ-परिच्छेद पर विचार कीजिए [आकृति 14.6(i)]। अनुप्रस्थ-परिच्छेद एक वृत्त है। मान लीजिए कि शंकु को उसके आधार के समांतर एक तल द्वारा अक्ष के किसी बिंदु में से जाते हुए काटा जाता है और उस भाग को, जिसमें शीर्ष है, हटा दिया जाता है। बचा हुआ भाग [आकृति 14.6 (ii) में ABDC],

जो कि एक बाल्टी या शीशे के गिलास के आकार का है [आकृति 14.6(iii)], प्रायः शंकु का *छिन्नक* (*frustsum*) कहलाता है। लंब वृत्तीय शंकु के छिन्नक में दो असमान वृत्ताकार आधार होते हैं और एक वक्र पृष्ठ होता है।

दोनों आधारों के केंद्रों को मिलाने वाले रेखाखंड PQ को *छिन्नक की ऊँचाई* कहते हैं। आकृति 14.6 (iii) में, प्रत्येक रेखाखंड BD या AC को उसकी *तिर्यक* (*तिरछी*) ऊँचाई कहते हैं।

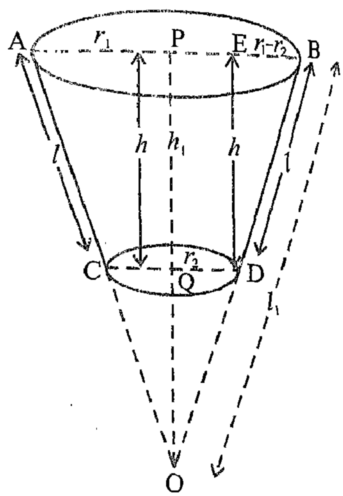
स्पष्टतः, छिन्नक की ऊँचाई शंकुओं OAB और OCD की ऊँचाइयों के अंतर के बराबर है। इसी प्रकार, छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई शंकुओं OAB और OCD की तिर्यक ऊँचाइयों के अंतर के बराबर है।



आकृति 14.6

14.5 लंब वृत्तीय शंकु के छिन्नक का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल

मान लीजिए h ऊँचाई, l तिर्यक ऊँचाई और r_1 तथा r_2 $(r_1 > r_2)$ शंकु के छिन्नक के आधार की त्रिज्याएँ हैं (आकृति 14.7)। हम शंक्वाकार भाग OCD को पूरा करते हैं। लंब वृत्तीय शंकु के छिन्नक को हम दो लंब वृत्तीय शंकुओं OAB और OCD के अंतर के रूप में देख सकते हैं।



आकृति 14.7

मान लीजिए शंकु OAB की ऊँचाई h_1 और उसकी तिर्यक ऊँचाई l_1 है, अर्थात् $OP = h_1$ और $OA = OB = l_1$ है।

तब, शंकु OCD की ऊँचाई $= h_1 - h$

क्योंकि समकोण त्रिभुज OQD और OPB समरूप हैं (कोण-कोण समरूपता), अत: हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{h_1 - h}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

इससे प्राप्त है : $\frac{h}{h_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$

या $$h_1 = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} \qquad (1)$$

अब, शंकु OCD की ऊँचाई $= h_1 - h = \frac{hr_1}{r_1 - r_2} - h$

$$= \frac{hr_2}{r_1 - r_2} \qquad (2)$$

शंकु के छिन्नक का आयतन = शंकु OAB का आयतन − शंकु OCD का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (h_1 - h)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(r_1^2 \cdot \frac{hr_1}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2 . hr_2}{r_1 - r_2} \right) \qquad [(1) \text{ और } (2) \text{ से}]$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \right)$

टिप्पणी : यदि A_1 और A_2 ($A_1 > A_2$) दोनों वृत्ताकार आधारों के क्षेत्रफल हों, तो

$$A_1 = \pi r_1^2$$

और $$A_2 = \pi r_2^2$$

अत:, शंकु के छिन्नक का आयतन

$$= \frac{h}{3}\left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \sqrt{\pi r_1^2}\sqrt{\pi r_2^2}\right),$$

जिसे नीचे दिए गए रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\frac{h}{3}\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\right)$$

अब, ΔDEB से, $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

क्योंकि $\Delta OQD \sim \Delta OPB$, अत: हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{l_1 - l}{l_1} = \frac{r_2}{r_1}$$

इससे प्राप्त होता है : $$l_1 = \frac{l r_1}{r_1 - r_2} \quad (3)$$

पुन:, $$l_1 - l = \frac{l r_1}{r_1 - r_2} - l$$

$$= \frac{l r_2}{r_1 - r_2} \quad (4)$$

अत:, शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 (l_1 - l)$$

$$= \pi r_1 . \frac{l r_1}{r_1 - r_2} - \pi r_2 . \frac{l r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{[(3) और (4) से]}$$

$$= \pi l \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \pi l (r_1 + r_2)$$

अतः, छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l(r_1 + r_2)$, जहाँ $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ है।

$\therefore$ छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$

किसी धातु की चादर से बना एक बर्तन एक शंकु के छिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16 सेमी तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 सेमी और 20 सेमी हैं। 15 रु प्रति लीटर की दर से पूरे बर्तन में भरे दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। बर्तन बनाने में प्रयोग धातु की चादर का मूल्य भी ज्ञात कीजिए, यदि चादर का मूल्य 5 रु प्रति 100 सेमी^{2} हो। ($\pi = 3.14$ प्रयोग कीजिए)

बर्तन एक शंकु का छिन्नक है, जिसकी ऊँचाई 16 सेमी और आधारों की त्रिज्याएँ 20 सेमी और 8 सेमी हैं। इस प्रकार, $h = 16$ सेमी, $r_1 = 20$ सेमी, $r_2 = 8$ सेमी है। इसकी तिर्यक ऊँचाई

$$l = \sqrt{16^2 + (20-8)^2} \text{ सेमी}$$

$$= \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ सेमी}$$

$$= 20 \text{ सेमी}$$

अब बर्तन का आयतन $= 3.14 \times \frac{16}{3} \times (20^2 + 8^2 + 20 \times 8)$ सेमी^{3}

$$= 3.14 \times \frac{16}{3} \times 624 \text{ सेमी}^3$$

$$= 3.14 \times 16 \times 208 \text{ सेमी}^3$$

$$= 10449.92 \text{ सेमी}^3 = 10.45 \text{ लीटर (लगभग)}$$

इसलिए, दूध की मात्रा = 10.45 लीटर

$\therefore$ इसलिए, दूध का मूल्य $= (10.45 \times 15)$ रु

$= 156.75$ रु

ऊपर के सिरे को छोड़कर बर्तन का संपूर्ण पृष्ठ

$= [3.14 \times 20 \times (8 + 20) + 3.14 \times 8^2]$ सेमी^{2}

$$= (3.14 \times 20 \times 28 + 3.14 \times 64) \text{ सेमी}^2$$

$$= 1959.36 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{प्रयोग की गई चादर का मूल्य} = \frac{1959.36 \times 5}{100} \text{ रु}$$

$$= 97.97 \text{ रु (लगभग)}$$

1. किसी सर्कस के तम्बू का निचला भाग बेलनाकार है और उसका ऊपरी भाग समान आधार का शंकु है। बेलनाकार आधार की त्रिज्या 20 मी है। बेलनाकार और शंक्वाकार भागों की ऊँचाइयाँ क्रमश: 4.2 मी एवं 2.1 मी हैं। तम्बू का आयतन ज्ञात कीजिए।

2. एक 8.25 मी ऊँचा तम्बू 30 मी व्यास वाले आधार तथा 5.5 मी ऊँचाई वाले बेलन पर समान आधार के शंकु को जोड़कर बनाया गया है। 45 रु प्रति वर्ग मी की दर से तम्बू में लगे कपड़े (कैनवास) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

3. एक लंब वृत्तीय बेलन के सिरे गोलार्ध हैं। उसका आयतन ज्ञात कीजिए जबकि उसकी संपूर्ण लंबाई 2.7 मी और प्रत्येक अर्धगोलाकार सिरे का व्यास 0.7 मी है।

4. लोहे का एक खंभा 110 सेमी ऊँचे तथा 12 सेमी व्यास के एक बेलनाकार भाग पर 9 सेमी ऊँचा शंकु रखने से बना है। खंभे का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि 1 घन सेमी लोहे का द्रव्यमान 8 ग्राम होता है।

   ($\pi = \frac{355}{113}$ का प्रयोग कीजिए)

5. पेट्रोल की एक बेलनाकार टंकी के आधार का व्यास 21 सेमी और लंबाई 18 सेमी है। वह शंक्वाकार सिरों से जुड़ी है, जिनमें से प्रत्येक की अक्ष लंबाई 9 सेमी है। टंकी की धारिता ज्ञात कीजिए।

6. एक तम्बू, 20 मी व्यास वाले आधार तथा 2.5 मी की ऊँचाई वाले बेलन और उसके ऊपर समान आधार के 7.5 मी ऊँचे शंकु को जोड़कर बनाया गया है। तम्बू का आयतन तथा 100 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इसमें प्रयोग किए गए कपड़े का मूल्य ज्ञात कीजिए।

7. एक भवन का आंतरिक भाग 12 मी त्रिज्या वाले आधार तथा 3.5 मी ऊँचाई वाले बेलन और उसके ऊपर

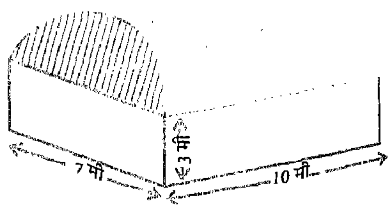
समान आधार के 12.5 मी तिर्यक ऊँचाई वाले शंकु के संयोजन से बनाया गया है। भवन का आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक बॉयलर (boiler) बेलनाकार है जिसकी लंबाई 2 मी है और उसके प्रत्येक सिरे पर 2 मी व्यास का एक गोलार्ध है। बॉयलर का आयतन ज्ञात कीजिए।

9. एक बर्तन एक खोखले बेलन के रूप में है जिसकी पेंदी उसी के आधार पर बना एक गोलार्ध है। बेलन की गहराई $4\frac{2}{3}$ मी है और गोलार्ध का व्यास 3.5 मी है। उस बर्तन का आयतन और आंतरिक पृष्ठ ज्ञात कीजिए

10. एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 3 सेमी और 4 सेमी हैं, को उसके कर्ण के परित: घुमाया जाता है। इस प्रकार बने द्विशंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

11. एक गोदाम का आकार आकृति 14.8 के अनुसार है। गोदाम की चौड़ाई की ओर का ऊर्ध्वाधर अनुप्रस्थ-परिच्छेद 7 मी × 3 मी माप का एक आयत है जिसके ऊपर 3.5 मी त्रिज्या का अर्धवृत्त है। घनाभ के आकार वाले भाग की आंतरिक माप 10 मी × 7 मी × 3 मी हैं। गोदाम का आयतन और उसके फर्श को छोड़कर संपूर्ण आंतरिक पृष्ठ ज्ञात कीजिए।



आकृति 14.8

12. एक ठोस लंब वृत्तीय बेलन, जिसकी ऊँचाई 10 सेमी और आधार की त्रिज्या 6 सेमी है, से उसी ऊँचाई और उसी आधार का एक लंब वृत्तीय शंकु काटकर हटा दिया जाता है। शेष ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

13. 14 सेमी व्यास और 42 सेमी ऊँचाई का एक बेलनाकार बर्तन उसी आकार के 16 सेमी व्यास और 42 सेमी ऊँचाई के बर्तन में डालकर सममित रूप से (symmetrically) स्थिर किया गया है। दोनों बर्तनों के बीच के स्थान को ऊष्मा-रोधन हेतु कॉर्क के बुरादे से भर दिया गया है। इसके लिए कितने घन सेमी कॉर्क के बुरादे की आवश्यकता होगी?

14. लोहे के बने एक बेलनाकार सड़क-रोलर की लंबाई 1 मी है। उसका अंत: व्यास 54 सेमी है और लोहे की चादर, जो सड़क-रोलर को बनाने में उपयोग की गई है, की मोटाई 9 सेमी है। रोलर का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि 1 $सेमी^3$ लोहे का द्रव्यमान 7.8 ग्राम हो। (π = 3.14 लीजिए)

15. यदि 45 सेमी ऊँची एक बाल्टी के सिरों की त्रिज्याएँ 28 सेमी और 7 सेमी हों, तो उसकी धारिता और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. एक शंकु की ऊँचाई 30 सेमी है। उसके शिखर की ओर से एक छोटा शंकु उसके आधार के समांतर एक तल द्वारा काटा गया है। यदि छोटे शंकु का आयतन दिए हुए शंकु के आयतन का $\frac{1}{27}$ हो, तो आधार से कितनी ऊँचाई पर उसे काटा गया है?

17. एक खोखले शंकु को उसके आधार के समांतर एक तल से काटा जाता है और उसका ऊपरी भाग हटा दिया जाता है। यदि शेष भाग का वक्र पृष्ठ संपूर्ण शंकु के वक्र पृष्ठ का $\frac{8}{9}$ हो, तो तल के द्वारा काटे गए शंकु की ऊँचाई के दो भागों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

[**संकेत :** काटे गए ऊपरी भाग (शंकु) का वक्र पृष्ठ, संपूर्ण शंकु के वक्र पृष्ठ का $\frac{1}{9}$ है।]

अध्याय 15

सांख्यिकी

15.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने सांख्यिकी की कुछ मूलभूत संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। याद कीजिए कि साधारण भाषा में शब्द सांख्यिकी का उपयोग आँकड़ों या संख्यात्मक प्रकथनों के लिए किया जाता है। किंतु वह विज्ञान, जो कि संख्यात्मक आँकड़ों के संग्रह, प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण में उपयोगी विधियों एवं तकनीकों का अध्ययन करता है और उन पर आधारित निष्कर्ष निकालता है, भी सांख्यिकी कहलाता है। इस प्रकार, सांख्यिकी शब्द का उपयोग दो अर्थों में किया जाता है :

(i) आँकड़ों के अर्थ में

और (ii) एक विज्ञान के अर्थ में

इस अध्याय में, हम पाई चार्ट (Pie chart) के उपयोग द्वारा संख्यात्मक आँकड़ों के चित्रमय निरूपण, वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य एवं अनिश्चितता के माप के रूप में प्रायिकता की मूलभूत संकल्पना का अध्ययन करेंगे।

15.2 सांख्यिकीय आँकड़ों का चित्रमय निरूपण

किसी भी अन्वेषण में प्रथम कार्य आँकड़ों को संकलित करने का होता है। इसे एक निश्चित उद्देश्य को ध्यान में रखकर, एक क्रमबद्ध योजना के अनुसार क्रियान्वित करना चाहिए। किसी अन्वेषण के दौरान जो प्राथमिक आँकड़े संग्रहित किए जाते हैं, वे सरलता से समझने योग्य नहीं होते। इसलिए विद्वतापूर्ण निर्णय लेने हेतु उनका उचित *वर्गीकरण* (*classification*) आवश्यक होता है। इस ध्येय को ध्यान में रखकर प्राथमिक आँकड़ों को चर के मान के अनुसार वर्गों की सुविधाजनक संख्या में बाँटा जाता है, तथा प्रत्येक वर्ग में उसकी बारंबारता को ज्ञात किया जाता है।

आँकड़ों का संकलन एवं वर्गीकरण उनके प्रस्तुतीकरण की समस्या को जन्म देता है। आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण का अर्थ होता है कि उनका एक ऐसे स्पष्ट एवं आकर्षक रूप में प्रदर्शन जिससे कि वे सरलता से समझे जाएँ एवं विश्लेषित किए जा सकें। आँकड़ों को प्रस्तुत करने के सामान्यत: निम्नलिखित दो रूप उपयोग में लाए जाते हैं :

(i) सारणी (Tables)

(ii) आलेख (Graphs या Diagrams)

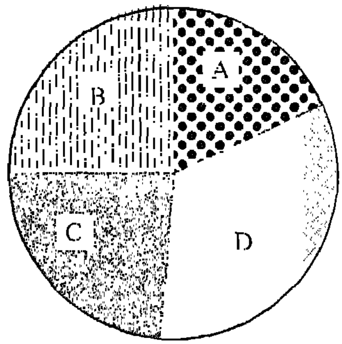
आप *बारंबारता बंटन सारणी* (*frequency distribution table*) की रचना से परिचित हैं। बहुधा आँकड़ों को चित्रों द्वारा निरूपित करने पर हमें श्रेष्ठतर संदर्श प्राप्त होते हैं। एक आलेख दत्त आँकड़ों का चित्रीय निरूपण करता है। इन आलेखों को कभी-कभी *चार्ट* या *आरेख* (*diagram*) भी कहा जाता है। सामान्यत: सांख्यिकीय आँकड़ों को निरूपित करने के लिए निम्नलिखित प्रकार के आलेखों या आरेखों का उपयोग किया जाता है :

(i) आयतचित्र (Histogram)
(ii) बारंबारता बहुभुज (Frequency polygon)
(iii) बारंबारता वक्र (Frequency curve)
(iv) दंड आरेख (Bar diagram)
(v) चित्रालेख (Pictograph)
(vi) पाई चार्ट (Pie chart) या वृत्तीय आरेख (Circular diagram)

निम्न अनुच्छेद में, हम केवल *पाई चार्ट* (*Pie chart*) का अध्ययन करेंगे।

15.3 पाई चार्ट

पाई चार्ट एक वृत्तीय आरेख है (आकृति 15.1)। जब किसी भाग की तुलना अन्य अवयवों या संपूर्ण से करनी हो, तब पाई चार्ट का उपयोग किया जाता है। अवयवों के सापेक्ष मान वृत्त के त्रिज्यखंडों (sectors) से निरूपित किए जाते हैं। चूंकि त्रिज्यखंड एक पाई की फाँकों के समान हैं, अत: इसे पाई चार्ट (या पाई आरेख) कहते हैं। इसकी रचना करने के लिए हम इस तथ्य का उपयोग करते हैं कि दत्त मानों का कुल योग एक वृत्तीय चाप में स्थित कुल अंशों की संख्या, अर्थात् 360^0 से संगति करता है। तब वृत्त को भिन्न त्रिज्यखंडों में विभाजित किया जाता है, जो कि आँकड़ों के अवयवों के सापेक्ष मापों (मानों) को निरूपित करते हैं। वृत्त के केंद्र पर बने संपूर्ण कोण को निर्दिष्ट अनुपातों में विभाजित करने से यह संभव होता है। पाई चार्ट की रचना को हम उदाहरणों की सहायता से समझाएँगे।



आकृति 15.1

उदाहरण 1 : पाठशाला के एक बालक द्वारा किसी कार्यकारी दिन में विभिन्न गतिविधियों में व्यतीत किए गए घंटों की संख्या निम्नलिखित है :

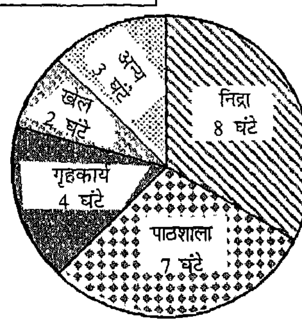
गतिविधि	घंटों की संख्या
निद्रा	8
पाठशाला	7
गृहकार्य	4
खेल	2
अन्य	3
योग	24

इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

हल : एक दिन के 24 घंटों में से विभिन्न गतिविधियों में व्यतीत किए गए घंटों को 360^0 के अवयवों में विभाजित किया जाता है। चूंकि निद्रा की समयावधि 8 घंटे है, अतः इसे $\frac{8}{24} \times 360^\circ = 120^\circ$ निरूपित करना चाहिए। इसलिए निद्रा के घंटों को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण 120^0 होना चाहिए। इसी प्रकार, अन्य गतिविधियों को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के द्वारा अंतरित कोणों के अंश मापों का निम्नानुसार परिकलन किया जाता है :

सारणी 15.1

गतिविधि	अवधि घंटों में	केंद्रीय कोण का माप
निद्रा	8	$\frac{8}{24} \times 360^\circ = 120^\circ$
पाठशाला	7	$\frac{7}{24} \times 360^\circ = 105^\circ$
गृहकार्य	4	$\frac{4}{24} \times 360^\circ = 60^\circ$
खेल	2	$\frac{2}{24} \times 360^\circ = 30^\circ$
अन्य	3	$\frac{3}{24} \times 360^\circ = 45^\circ$
योग	24	360°



आकृति 15.2

अब हम एक सुविधाजनक त्रिज्या का वृत्त खींचते हैं। 120^0 के केंद्रीय कोण वाले एक त्रिज्यखंड को निद्रा में व्यतीत किए गए घंटों का समय निरूपित करने के लिए नियत किया जाता है। इसी प्रकार, अन्य गतिविधियों में व्यतीत किए गए समय को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों को, मान लीजिए, दक्षिणावर्त (clockwise) दिशा में चिह्नित किया जाता है। विभिन्न त्रिज्यखंडों की परिशुद्ध रचना हेतु चाँदे का प्रयोग किया जाता है। विभिन्न त्रिज्यखंडों में भिन्न-भिन्न डिजाइनों की रचना की जाती है, जैसा

कि आकृति 15.2 में दर्शाया गया है। भिन्न गतिविधियों के ज्ञात घंटों को पाई चार्ट की आकृति के निकट दर्शाया जाता है।

उदाहरण 2 : किसी महाविद्यालय के विभिन्न संकायों में प्रवेश पाए विद्यार्थियों की संख्या निम्नानुसार है :

संकाय	विज्ञान	कला	वाणिज्य	विधि	शिक्षा	योग
विद्यार्थियों की संख्या	1000	1200	650	450	300	3600

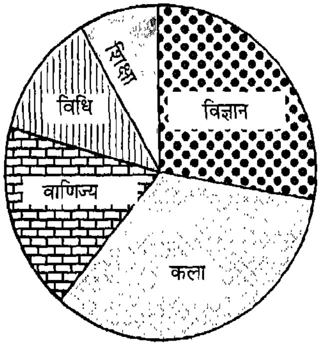
उपर्युक्त आँकड़ों को निरूपित करते हुए एक पाई चार्ट खींचिए।

हल : सारणी 15.2 में प्रत्येक संकाय का भाग 360° के अवयव के रूप में दर्शाया गया है :

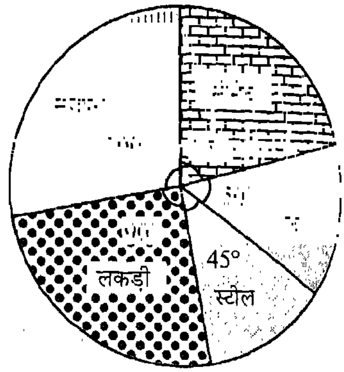
सारणी 15.2

संकाय	**विद्यार्थियों की संख्या**	**भाग- 360° के अवयव के रूप में**
विज्ञान	1000	$\frac{1000}{3600} \times 360^\circ = \frac{1000}{10} = 100^\circ$
कला	1200	$\frac{1200}{10} = 120^\circ$
वाणिज्य	650	$\frac{650}{10} = 65^\circ$
विधि	450	$\frac{450}{10} = 45^\circ$
शिक्षा	300	$\frac{300}{10} = 30^\circ$
योग	3600	360°

पाई चार्ट की रचना उपर्युक्त मानों पर आधारित है। हम एक सुविधाजनक त्रिज्या का वृत्त खींचते हैं। सर्वप्रथम हमने 100° केंद्रीय कोण वाले एक त्रिज्यखंड को नियत किया है, जो कि विज्ञान संकाय के भाग को दर्शाता है। इसी प्रकार, अन्य संकायों को दर्शाने वाले त्रिज्यखंड चिह्नित किए गए हैं (आकृति 15.3)।



आकृति 15.3



आकृति 15.4

उदाहरण 3 : आकृति 15.4 में दिए गए पाई चार्ट में किसी महानगर में एक फ्लैट के निर्माण में होने वाले भिन्न मदों के व्यय दर्शाए गए हैं। पाई चार्ट का अध्ययन करके भिन्न मदों पर होने वाले प्रतिशत व्यय ज्ञात कीजिए। यदि फ्लैट का मूल्य 5,40,000 रु हो, तो निम्न को ज्ञात कीजिए :

(i) स्टील एवं सीमेंट पर हुआ अलग-अलग व्यय।

(ii) लकड़ी और ईंटों पर हुए व्ययों का अंतर।

हल : पाई चार्ट के भिन्न अवयवों को 360° के प्रतिशत मूल्यों में परिवर्तित किया गया है, जिन्हें निम्न सारणी 15.3 में दर्शाया गया है :

सारणी 15.3

मद	360° का अवयव	प्रतिशत के रूप में भाग
मजदूरी	100°	$\frac{100}{360}\times 100=\frac{250}{9}\%$
सीमेंट	75°	$\frac{75}{360}\times 100=\frac{125}{6}\%$
ईंट	50°	$\frac{50}{360}\times 100=\frac{125}{9}\%$
स्टील	45°	$\frac{45}{360}\times 100=\frac{25}{2}\%$
लकड़ी	90°	$\frac{90}{360}\times 100=25\%$

इस प्रकार, मजदूरी, सीमेंट, ईंट, स्टील और लकड़ी पर प्रतिशत व्यय क्रमशः $\frac{250}{9}, \frac{125}{6}, \frac{125}{9}, \frac{25}{2}$ और 25 हैं।

(i) स्टील पर हुआ व्यय (प्रतिशत के भाग का उपयोग करके)

$$= \frac{25}{2} \times \frac{1}{100} \times 540000 \text{ रु}$$
$$= 67500 \text{ रु}$$

और सीमेंट पर हुआ व्यय

$$= \frac{125}{6} \times \frac{1}{100} \times 540000 \text{ रु}$$
$$= 112500 \text{ रु}$$

(ii) हमें लकड़ी और ईंटों पर हुए व्ययों का केवल अंतर ज्ञात करना है। लकड़ी और ईंटों को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों का अंतर है :

$$90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

इसलिए व्ययों का वांछित अंतर

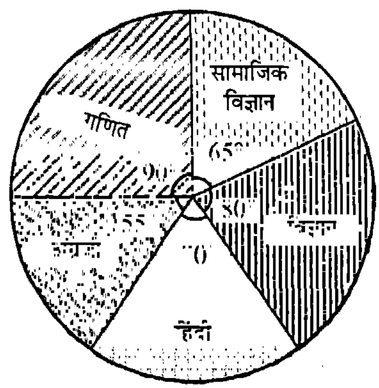
$$= \frac{40}{360} \times 540000 \text{ रु}$$
$$= 60000 \text{ रु}$$

टिप्पणी : ऐसी स्थितियों में, संगत केंद्रीय कोणों के उपयोग या उनके संगत प्रतिशत भागों के उपयोग द्वारा परिकलन किया जा सकता है।

उदाहरण 4 : एक विद्यार्थी के किसी परीक्षा में अंग्रेजी, हिंदी, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान और गणित के प्राप्तांक आसन्न पाई चार्ट (आकृति 15.5) में दर्शाए गए हैं। यदि विद्यार्थी के प्राप्तांकों का कुल योग 540 हो, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस विषय में विद्यार्थी को 105 अंक प्राप्त हुए?

(ii) विद्यार्थी को गणित में हिंदी से कितने अधिक अंक प्राप्त हुए?



आकृति 15.5

(iii) जाँच कीजिए कि क्या सामाजिक विज्ञान एवं गणित के प्राप्तांकों का योग विज्ञान एवं हिंदी के प्राप्तांकों के योग से अधिक है।

हल :

(i) प्राप्तांकों के योग 540 के लिए, केंद्रीय कोण $= 360^\circ$

$\therefore$ 105 प्राप्तांकों के लिए केंद्रीय कोण $= \frac{360^\circ}{540} \times 105 = 70^\circ$

चूंकि हिंदी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण 70° है, अतः विद्यार्थी को हिंदी में 105 अंक प्राप्त हुए।

(ii) गणित एवं हिंदी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों का अंतर है :

$$= 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$\therefore$ इसके संगत प्राप्तांकों का अंतर

$$= \frac{20}{360} \times 540 = 30$$

अतः, विद्यार्थी को गणित में हिंदी से 30 अंक अधिक प्राप्त हुए।

(iii) सामाजिक विज्ञान एवं गणित को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों का योग

$$= 65^\circ + 90^\circ = 155^\circ$$

इसी प्रकार, विज्ञान एवं हिंदी को निरूपित करने वाले त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोणों का योग

$$= 80^\circ + 70^\circ = 150^\circ$$

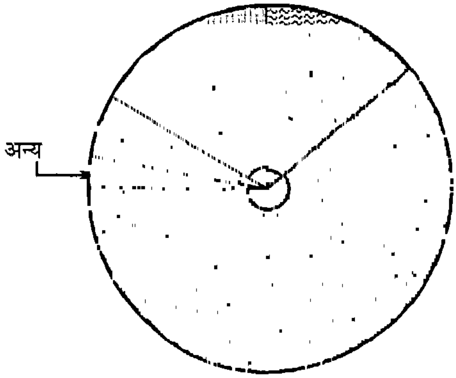
चूंकि $155^\circ > 150^\circ$ है, अतः सामाजिक विज्ञान एवं गणित में प्राप्त अंकों का योग विज्ञान एवं हिंदी में प्राप्त अंकों के योग से अधिक है।

प्रश्नावली 15.1

1. किसी छात्रावास में विभिन्न भाषाएँ बोलने वाले छात्रों की संख्या निम्नलिखित है। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट में प्रस्तुत कीजिए।

भाषा	हिंदी	अंग्रेजी	मराठी	तमिल	बंगला	योग
विद्यार्थियों की संख्या	40	12	9	7	4	72

2. आसन्न पाई चार्ट (आकृति 15.6) में, एक परिवार के विभिन्न मदों में हुए व्यय दर्शाए गए हैं। पाई चार्ट का अध्ययन कर भिन्न मदों में हुआ प्रतिशत व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 15.6

3. बेकरी की एक दुकान पर एक दिन में विभिन्न मदों में हुई बिक्री (रुपयों में) निम्नानुसार है :

साधारण डबलरोटी :	260 रु
फल-डबलरोटी :	40 रु
केक एवं पेस्ट्री :	100 रु
बिस्कुट :	60 रु
अन्य :	20 रु

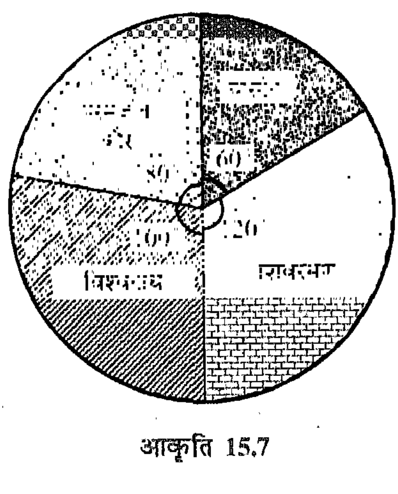
उपर्युक्त बिक्री को निरूपित करने वाला एक पाई चार्ट खींचिए।

4. पाठशाला नेतृत्व के लिए चुनाव में भाग लेने वाले चार विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त वैध मतों की संख्या संलग्न पाई चार्ट (आकृति 15.7) में निरूपित की गई है। वैध मतों की कुल संख्या 720 थी। पाई चार्ट का अध्ययन कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) चुनाव में कौन विजयी रहा?

(ii) किसी उम्मीदवार के द्वारा प्राप्त न्यूनतम मतों की संख्या क्या है?

(iii) विजयी उम्मीदवार ने अपने निकटतम प्रतिद्वंदी को कितने मतों से हराया?



आकृति 15.7

5. निम्नलिखित सारणी 15.4 में, एक राज्य के विभिन्न वर्गों के श्रमिकों के प्रतिशत दिए गए हैं। इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

सारणी 15.4

श्रमिकों का वर्ग	%
किसान	40
खेतिहर श्रमिक	25
औद्योगिक श्रमिक	12.5
वाणिज्यिक श्रमिक	10
अन्य	12.5

6. जुलाई, 2002 के माह में एक व्यक्ति ने अपने मासिक वेतन के 7200 रु विभिन्न मदों में निम्नानुसार व्यय किए :

मद	कपड़े	भोजन	मकान किराया	शिक्षा	विविध
व्यय (रुपयों में)	600	4000	1200	400	1000

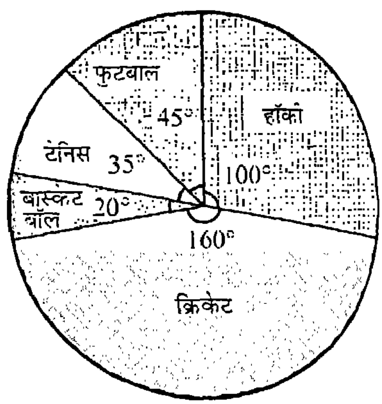
इन आँकड़ों को एक पाई चार्ट के रूप में निरूपित कीजिए।

7. एक पाठशाला प्रबंध समिति ने एक केलेंडर वर्ष में विभिन्न खेलों पर जो राशि व्यय की, वह संलग्न पाई चार्ट (आकृति 15.8) में दर्शाई गए है। यदि फुटबाल पर 9000 रु की राशि व्यय की गई हो, तो निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) खेलों पर कुल कितनी राशि व्यय की गई?

(ii) हॉकी पर फुटबाल से कितनी अधिक राशि व्यय की गई?

(iii) क्रिकेट पर कितनी राशि व्यय की गई?



आकृति 15.8

8. एक विशेष जनपद के किसी गाँव में कृषि उत्पादन के विभिन्न मदों के प्रतिशत निम्नानुसार हैं। इन आँकड़ों का निरूपण एक पाई चार्ट द्वारा कीजिए।

मद	गेहूँ	दालें	ज्वार	मूँगफली	सब्जियाँ	योग
%	$\frac{125}{3}$	$\frac{125}{6}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{50}{3}$	$\frac{25}{3}$	100

15.4 यथाप्राप्त आँकड़ों का माध्य

याद कीजिए कि किसी चर x के मानों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के माध्य को $\bar{x}$ से दर्शाया जाता है और उसका मान है :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{(सूत्र I)}$$

योग $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ को प्रतीक $\sum_{i=1}^{n} x_i$ से दर्शाया जाता है।

उदाहरण 5 : किसी महाविद्यालय के दस विद्यार्थियों के प्रतिदिन के जेब खर्च (रुपयों में) क्रमशः निम्नलिखित हैं :

$$26, 27, 20, 29, 21, 23, 25, 30, 28, 21$$

माध्य प्रतिदिन जेब खर्च ज्ञात कीजिए।

हल : माध्य $= \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$= \frac{1}{10}[26 + 27 + 20 + 29 + 21 + 23 + 25 + 30 + 28 + 21]$$

$$= \frac{1}{10}[250] = 25$$

अतः, माध्य प्रतिदिन जेब खर्च 25 रु है।

टिप्पणी : इसे ध्यान में रखना चाहिए कि माप की इकाई को भी, जिसमें चर को मापा गया है (यहाँ रुपए) माध्य के मान के साथ देना चाहिए।

15.5 अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

याद कीजिए कि यदि यथाप्राप्त आँकड़ों में n प्रेक्षणों के केवल k अलग-अलग मान हों, जिन्हें $x_1, x_2, \ldots, x_k$ से दर्शाया गया हो और जिनकी बारंबारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, \ldots, f_k$, हों, तब आँकड़ों

को निम्नलिखित बारंबारता सारणी के रूप में रखा जा सकता है:

सारणी 15.5

मान	बारंबारता
x_1	f_1
x_2	f_2
$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_k
योग	$\sum_{i=1}^{k} f_i = n$

तब, माध्य के सूत्र I को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \qquad \text{(सूत्र II)}$$

जहाँ $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$ कुल बारंबारता को प्रकट करता है।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित आँकड़े 40 विद्यार्थियों की कक्षा में किसी विशेष आयु के विद्यार्थियों की संख्या दर्शाते हैं। विद्यार्थियों की माध्य आयु का परिकलन कीजिए।

आयु (वर्षों में)	15	16	17	18	19	20
विद्यार्थियों की संख्या	3	8	10	10	5	4

हल : दत्त आँकड़ों को निम्नलिखित सारणी के रूप में दर्शाया जा सकता है :

सारणी 15.6

आयु (x_i)	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	(f_i x_i)
15	3	45
16	8	128
17	10	170
18	10	180
19	5	95
20	4	80
योग	40	698

इसलिए $\quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{698}{40} = 17.45$ वर्ष

15.6 माध्य के परिकलन की कल्पित माध्य विधि

यदि x_i के मान परिमाण में बहुत अधिक हों, तो माध्य $\overline{x}$ का परिकलन करने में अधिक श्रम लगता है व अधिक समय भी।

हम एक संक्षिप्त विधि खोजने की आकांक्षा रखते हैं। यहाँ हम एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) a लेते हैं, जिसे *कल्पित माध्य* (*assumed mean*) भी कहते हैं, और इसे प्रत्येक मान x_i में से घटाते जाते हैं। घटाने पर प्राप्त मान $d_i = x_i - a$, को a से x_i का *विचलन* (*deviation*) कहते हैं। इस प्रकार,

$$x_i = a + d_i,$$

एवं
$$f_i x_i = af_i + f_i d_i$$

दोनों पक्षों का i पर 1 से k तक योग करने पर,

$$\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = a\sum_{i=1}^{k} f_i + \sum_{i=1}^{k} f_i d_i$$

इसलिए,
$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i d_i$$

$$= a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i d_i \qquad \left(\text{चूंकि } \sum_{i=1}^{k} f_i = n\right) \qquad \text{(सूत्र III)}$$

आप देखेंगे कि अनेक स्थितियों में सूत्र II की अपेक्षा सूत्र III का उपयोग करना अधिक सुविधाजनक होता है।

टिप्पणी : किसी भी संख्या को कल्पित माध्य 'a' माना जा सकता है, लेकिन सामान्यत: हम 'a' को x_i के सभी मानों के बीच का कोई मान लेते हैं।

उदाहरण 7 : निम्नलिखित बारंबारता बंटन से, जो कि सारणी 15.7 में दिया है, पौधों की माध्य ऊँचाई का परिकलन दोनों, प्रत्यक्ष एवं कल्पित माध्य विधियों से कीजिए :

सारणी 15.7

ऊँचाई (सेमी में) (x_i)	पौधों की संख्या (f_i)
61	5
64	18
67	42
70	27
73	8
योग	100

हल : माध्य का परिकलन निम्नलिखित सारणी 15.8 में दर्शाया है :

सारणी 15.8

ऊँचाई x_i	बारंबारता f_i	$f_i x_i$	विचलन $d_i = x_i - 67$	$f_i d_i$
61	5	305	−6	−30
64	18	1152	−3	−54
$a = 67$	42	2814	0	0
70	27	1890	3	81
73	8	584	6	48
	$n = \sum_{i=1}^{5} f_i = 100$	$\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 6745$		$\sum_{i=1}^{5} f_i d_i = 45$

(i) प्रत्यक्ष विधि से (सूत्र II का उपयोग करके) :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{5} f_i x_i = \frac{6745}{100} = 67.45 \text{ सेमी}$$

(ii) कल्पित माध्य विधि से (सूत्र III का उपयोग करके):

दिए हुए पाँच मानों में से मध्य के $a = 67$ को कल्पित माध्य लेने पर,

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{5} f_i d_i = 67 + \frac{45}{100} = 67.45 \text{ सेमी}$$

इस प्रकार, हमने देखा कि प्रत्यक्ष विधि द्वारा परिकलन लंबा होता है, जबकि कल्पित माध्य विधि अधिक सुविधाजनक है तथा इससे श्रम एवं समय दोनों की बचत होती है।

उदाहरण 8 : सांख्यिकी की एक परीक्षा में 100 विद्यार्थियों के 50 में से प्राप्त अंक सारणी 15.9 में दिए गए हैं। विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

सारणी 15.9

प्राप्तांक (x_i)	15	20	22	24	25	30	33	38
विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	5	8	11	20	23	18	13	2

हल : चूंकि मध्य में दो मान 24 एवं 25 स्थित हैं, इसलिए हम इन दोनों में से किसी को भी कल्पित माध्य मान सकते हैं। मान लीजिए $a = 25$ है। हम निम्न सारणी बनाते हैं :

सारणी 15.10

x_i	f_i	$d_i = x_i - 25$	$f_i d_i$
15	5	−10	−50
20	8	−5	−40
22	11	−3	−33
24	20	−1	−20
$a = 25$	23	0	0
30	18	5	90
33	13	8	104
38	2	13	26
	$\sum f_i = 100$		$\sum f_i d_i = 77$

इसलिए कल्पित माध्य विधि से,

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{8} f_i d_i$$

$$= 25 + \frac{77}{100} = 25 + 0.77$$

$$= 25.77 \text{ अंक}$$

15.7 माध्य के परिकलन की पद-विचलन विधि

कल्पित माध्य विधि में हमने विचलन $d_i = x_i - a$, के मान निकाले थे जहाँ a कल्पित माध्य था। कभी-कभी सभी विचलन d_i एक सार्व संख्या h (मान लीजिए) से विभाज्य होते हैं। तब

हम परिकलनों को अधिक सरल बना सकते हैं। इसके लिए हम

$$u_i = \frac{x_i - a}{h} \text{ या } x_i = a + hu_i, i = 1, 2, ..., k$$

रखते हैं।

तब सूत्र II का उपयोग करने पर,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(a + hu_i)$$

$$= \frac{1}{n} a \sum_{i=1}^{k} f_i + h\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i$$

$$= a + h\bar{u}, \qquad \text{(सूत्र IV)}$$

जहाँ $$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i u_i$$

उदाहरण 9 : 107 पेंचों के सिरों के व्यासों के नाप (मिमी में) निम्नानुसार हैं :

व्यास (मिमी में) (x_i)	34	37	40	43	46
पेंचों की संख्या (f_i)	17	19	23	21	27

पेंचों के सिरों के माध्य व्यास का परिकलन कीजिए।

हल : आइए हम कल्पित माध्य $a = 40$ लें। चूंकि इस उदाहरण में x_i के मानों के बीच समान अंतर है, इसलिए हम $h = 3$ लेते हैं और *पद-विचलन विधि* (*step deviation method*) से माध्य का परिकलन करने के लिए निम्नलिखित सारणी 15.11 बनाते हैं :

सारणी 15.11

x_i	f_i	$u_i = \frac{x_i - 40}{3}$	$f_i u_i$
34	17	–2	–34
37	19	–1	–19
$a = 40$	23	0	0
43	21	1	21
46	27	2	54
योग	107		22

अब $$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} f_i u_i = \frac{22}{107} = 0.2 \quad \text{(लगभग)}$$

इसलिए, सूत्र IV से,

$$\overline{x} = a + h\overline{u} = 40 + 3 \times 0.2$$
$$= 40.6 \text{ मिमी}$$

इस प्रकार, अभीष्ट माध्य व्यास 40.6 मिमी है।

15.8 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्य

कक्षा IX में, आपने वर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता बंटन सारणी के संबंध में पढ़ा ही है, जिसमें अनेक वर्ग अंतरालों एवं उनकी बारंबारताओं का समावेश होता है। इस अनुच्छेद में, हम ऐसे ही आँकड़ों के माध्य के परिकलन का अध्ययन करेंगे।

यहाँ आँकड़े एक बारंबारता बंटन में प्रस्तुत किए जाते हैं, जिसमें प्रत्येक वर्ग अंतराल में चर के एक या अनेक मान होते हैं (यह आवश्यक नहीं है कि सभी वर्गों के वर्ग माप समान ही हों)। प्रत्येक वर्ग-अंतराल की अपनी बारंबारता होती है। ऐसी सारणी में अलग-अलग मान अपनी पहचान खो देते हैं। हम यह मान लेते हैं कि किसी विशेष वर्ग-अंतराल के सभी मान वर्ग-अंतराल के मध्य-बिंदु (या वर्ग-चिह्न) के तुल्य हैं। यदि बारंबारता बंटन सारणी में k वर्ग-अंतराल हों, तो मध्य-बिंदुओं को $x_1, x_2, ..., x_k$ से प्रकट किया जाता है। यहाँ पर भी माध्य का परिकलन अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए वर्णित किसी भी सूत्र के अनुप्रयोग द्वारा किया जाता है। इसलिए वर्गीकृत आँकड़ों के माध्य का परिकलन करने के लिए भी तीन विधियाँ हैं :

(i) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) (ii) कल्पित माध्य विधि (Assumed Mean Method)

(iii) पद-विचलन विधि (Step-deviation Method)

अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा इन विधियों का उपयोग दर्शाएँगे।

उदाहरण 10 : निम्नलिखित आँकड़ों से किसी कक्षा के विद्यार्थियों की परीक्षा के प्राप्तांकों के माध्य का परिकलन तीनों विधियों द्वारा कीजिए :

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	योग
विद्यार्थियों की संख्या	12	18	27	20	17	6	100

हल :

(1) प्रत्यक्ष विधि :

सारणी 15.12

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (f_i)	मध्य-बिंदु (x_i)	$f_i x_i$
0-10	12	5	60
10-20	18	15	270
20-30	27	25	675
30-40	20	35	700
40-50	17	45	765
50-60	6	55	330
योग	100		2800

इसलिए माध्य $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i x_i = \frac{1}{100} \times 2800 = 28$ अंक (सूत्र II द्वारा)

(2) कल्पित माध्य विधि :

हम $a = 25$ लेते हैं।

सारणी 15.13

अंक	विद्यार्थियों की संख्या f_i	मध्य-बिंदु x_i	विचलन $d_i = x_i - 25$	$f_i d_i$
0-10	12	5	−20	−240
10-20	18	15	−10	−180
20-30	27	$a = 25$	0	0
30-40	20	35	10	200
40-50	17	45	20	340
50-60	6	55	30	180
योग	100			300

इसलिए, कल्पित माध्य विधि (सूत्र III) से,

$$\overline{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i d_i = 25 + \frac{300}{100} = 25 + 3$$

$$= 28 \text{ अंक}$$

(3) पद-विचलन विधि :

चूंकि वर्ग अंतराल समान माप के हैं, यहाँ पद-विचलन विधि का उपयोग करना सर्वाधिक सुविधाजनक होगा। हम $a = 25$ एवं $h = 10$ लेते हैं।

सारणी 15.14

अंक	विद्यार्थियों की संख्या f_i	मध्य-बिंदु x_i	$u_i = \frac{x_i - 25}{10}$	$f_i u_i$
0-10	12	5	−2	−24
10-20	18	15	−1	−18
20-30	27	$a = 25$	0	0
30-40	20	35	1	20
40-50	17	45	2	34
50-60	6	55	3	18
योग	100			+30

इसलिए पद-विचलन विधि (सूत्र IV) से,

$$\overline{x} = a + h.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i u_i$$

$$= 25 + 10 . \frac{1}{100} . 30$$

$$= 25 + \frac{300}{100} = 25 + 3 = 28 \text{ अंक}$$

उदाहरण 11 : निम्नलिखित संचयी बारंबारता सारणी से विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए :

सारणी 15.15

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 और अधिक	80
10 और अधिक	77
20 और अधिक	72
30 और अधिक	65
40 और अधिक	55
50 और अधिक	43
60 और अधिक	28
70 और अधिक	16
80 और अधिक	10
90 और अधिक	8
100 और अधिक	0

हल : सर्वप्रथम हमें संचयी बारंबारता बंटन को सामान्य बारंबारता बंटन में परिवर्तित करना है। हम अंकों का $0-10$, $10-20$, $20-30$, आदि वर्गों में विन्यास करते हैं। अब 0 और 0 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 80 है तथा 10 और 10 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 77 है। इसलिए $0-10$ के बीच में अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $80-77=3$ होगी। इसी प्रकार, $10-20$ के बीच में अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या $77-72=5$ और इसी प्रकार आगे भी करते जाते हैं। अब 55 को कल्पित माध्य a एवं $h=10$ लेने पर, निम्नलिखित बारंबारता सारणी प्राप्त होती है :

सारणी 15.16

अंक	मध्य-बिंदु x_i	f_i	$x_i - 55$	$u_i = \frac{x_i - 55}{10}$	$f_i u_i$
0-10	5	3	– 50	– 5	– 15
10-20	15	5	– 40	– 4	– 20
20-30	25	7	– 30	– 3	– 21
30-40	35	10	– 20	– 2	– 20
40-50	45	12	– 10	– 1	– 12
50-60	$a = 55$	15	0	0	0
60-70	65	12	10	1	12
70-80	75	6	20	2	12
80-90	85	2	30	3	6
90-100	95	8	40	4	32
योग		80			– 26

इसलिए, पद-विचलन विधि (सूत्र IV) से,

$$\overline{x} = a + h\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} f_i u_i$$

$$= 55 + 10 \times \frac{(-26)}{80} = 55 - 3.25$$

$= 51.75$ अंक

उदाहरण 12 : निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए वर्षों में माध्य आयु ज्ञात कीजिए :

आयु का वर्ग-अंतराल	बारंबारता
15-19	3
20-24	13
25-29	21
30-34	15
35-39	5
40-44	4
45-49	2
योग	63

हल : यहाँ, वर्ग-अंतराल 5 है। अतः, हम $h = 5$ एवं $a = 32$ लेते हैं और माध्य के परिकलन हेतु निम्नलिखित सारणी की रचना करते हैं :

सारणी 15.17

वर्ग अंतराल	बारंबारता f_i	मध्य-बिंदु x_i	$u_i = \frac{x_i - 32}{5}$	$f_i u_i$
15-19	3	17	-3	-9
20-24	13	22	-2	-26
25-29	21	27	-1	-21
30-34	15	$a = 32$	0	0
35-39	5	37	1	5
40-44	4	42	2	8
45-49	2	47	3	6
योग	63			$\sum_{i=1}^{7} f_i u_i = -37$

अब $$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} f_i u_i = -\frac{37}{63} = -0.587$$

इसलिए सूत्र IV से,

$$\overline{x} = a + h\overline{u} = 32 - 5 \times 0.587 = 29.06$$

अतः, माध्य आयु $= 29.06$ वर्ष है।

उदाहरण 13: एक बहुमंजिले भवन के बच्चों को दिए गए प्रतिदिन के जेब खर्च सारणी 15.18 में दर्शाए गए हैं। जेब खर्च का माध्य 18 रु है। अज्ञात बारंबारता ज्ञात कीजिए।

सारणी 15.18

वर्ग-अंतराल	बारंबारता
11-13	3
13-15	6
15-17	9
17-19	13
19-21	—
21-23	5
23-25	4

हल : हम अज्ञात बारंबारता को f से दर्शाते हैं तथा $a = 18$ एवं $h = 2$ लेते हैं। फिर हम निम्नलिखित सारणी 15.19 की रचना करते हैं :

सारणी 15.19

वर्ग अंतराल	मध्य-बिंदु x_i	f_i	$u_i = \frac{x_i - 18}{2}$	$f_i u_i$
11-13	12	3	-3	-9
13-15	14	6	-2	-12
15-17	16	9	-1	-9
17-19	$a = 18$	13	0	0
19-21	20	f	1	f
21-23	22	5	2	10
23-25	24	4	3	12
योग		$40 + f$		$-8 + f$

इसलिए पद-विचलन विधि (सूत्र IV) से,

$$\bar{x} = a + h.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} f_i u_i$$

इसलिए $$18 = 18 + \frac{2 \times (-8 + f)}{40 + f}$$

$\therefore$ $$f = 8$$

प्रश्नावली 15.2

1. किसी परीक्षा में 140 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं :

अंक	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50
विद्यार्थियों की संख्या	20	24	40	36	20

तीनों विधियों, अर्थात् प्रत्यक्ष विधि, कल्पित माध्य विधि और पद-विचलन विधि के द्वारा माध्य अंकों का परिकलन कीजिए।

2. निम्नलिखित बारंबारता बंटन के लिए वर्षों में माध्य आयु ज्ञात कीजिए :

आयु का वर्ग-अंतराल (वर्षों में)	बारंबारता f_i
25-29	4
30-34	14
35-39	22
40-44	16
45-49	6
50-54	5
55-59	3
योग	70

3. निम्नलिखित बारंबारता बंटन के माध्य का परिकलन कीजिए :

वर्ग अंतराल	0 - 80	80 - 160	160 - 240	240 - 320	320 - 400
बारंबारता	22	35	44	25	24

4. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए :

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	5
20 से कम	9
30 से कम	17
40 से कम	29
50 से कम	45
60 से कम	60
70 से कम	70
80 से कम	78
90 से कम	83
100 से कम	85

5. वर्ष 2000–2001 के लिए किसी नगर के साप्ताहिक निर्वाह खर्च सूचकांक निम्नानुसार हैं :

निर्वाह खर्च सूचकांक	सप्ताहों की संख्या
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
योग	52

माध्य साप्ताहिक निर्वाह खर्च सूचकांक का परिकलन कीजिए।

6. निम्नलिखित बारंबारता बंटन में वर्ग–अंतराल (40–50) की बारंबारता अज्ञात है। यह ज्ञात है कि बंटन का माध्य 52 है। अज्ञात बारंबारता ज्ञात कीजिए।

वेतन (रुपयों में)	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
श्रमिकों की संख्या	5	3	4	-	2	6	13

7. निम्न आँकड़ों से एक कॉलोनी के 100 निवासियों की माध्य आयु ज्ञात कीजिए :

आयु वर्षों में (से अधिक या बराबर)	व्यक्तियों की संख्या
0	100
10	90
20	75
30	50
40	25
50	15
60	5
70	0

8. निम्नलिखित बारंबारता सारणी का माध्य 50 है, परंतु वर्गों 20–40 एवं 60–80 की क्रमश: बारंबारताएँ f_1 एवं f_2 अज्ञात हैं। इन बारंबारताओं को ज्ञात कीजिए।

वर्ग	बारंबारता
0-20	17
20-40	f_1
40-60	32
60-80	f_2
80-100	19
योग	120

15.9 प्रायिकता

अपने दैनिक जीवन में, हम प्राय: ऐसे वाक्य सुनते हैं जैसे कि 'संभवत: आज वर्षा होगी' या 'कल का दिन गर्म रहने की संभावना है' या कि 'सर्वाधिक संभावना है कि मैं परीक्षा में प्रथम आऊँगा' आदि। इन प्रकथनों में अनिश्चितता का समावेश है। अब समस्या यह है कि हम इस अनिश्चितता को कैसे माप सकते हैं? गणित की एक शाखा, जिसे '*प्रायिकता का सिद्धांत*' (*Theory of Probability*) कहते हैं, में अनिश्चितता के मापन का प्रावधान है। इस सिद्धांत में हम ऐसी स्थितियों (या प्रयोगों या घटनाओं) पर ध्यान देते हैं जिनमें कोई विशेष परिणाम निश्चित नहीं होता है, किंतु वह अनेक संभाव्य परिणामों में से एक हो सकता है।

इस सिद्धांत का उद्भव 16वीं शताब्दी में हुआ। उसका प्रादुर्भाव संयोग के खेलों (Games of Chance) से हुआ, जैसे – सिक्का या पासा उछालना, अच्छी तरह फेंटी गई ताशों की गड्डी से पत्ते या बर्तन से गेंदों को निकालना आदि। इस विषय पर प्रथम पुस्तक इटली के गणितज्ञ *जे. कार्डन* (*J. Cardan*) (1501-1576) के द्वारा लिखी गई। पुस्तक का शीर्षक '*संयोग के खेलों पर पुस्तक*' (*Liber de Ludo Aleae*) था, जो कि 1663 में प्रकाशित हुई। फ्रांस के गणितज्ञों बी. पास्कल (B. Pascal) (1623-1662), *पियरे डी फरमेट* (*Pierre de Fermat*) (1601-1665), स्विस गणितज्ञ जे. बर्नूली (J. Bernoulli) (1654-1705) आदि ने भी इसमें उल्लेखनीय योगदान किया।

प्राकृतिक विज्ञान एवं सामाजिक विज्ञान के क्षेत्रों में प्रायिकता के सिद्धांत के विस्तृत एवं महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं।

15.10 प्रायिकता-अनिश्चितता का एक मापक

हम उन पहली समस्याओं में से एक की ओर अपना ध्यान देते हैं जिसके कारण प्रायिकता के सिद्धांत का विकास हुआ, यथा एक पासे को फेंकने की समस्या। पासा एक सु-संतुलित घन है जिसके छः फलकों पर 1 से 6 तक संख्याएँ (बिंदु) अंकित होती हैं (एक फलक पर एक ही संख्या) जैसा कि आकृति 15.9 में दर्शाया गया है। जब हम पासे से कोई खेल खेलते हैं, तो सामान्यतः उस संख्या में रुचि रखते हैं जो इसे उछालने के पश्चात् उसके सर्वोपरि फलक पर आती है।



आकृति 15.9

आइए, हम एक पासे को एक बार उछालें। संभाव्य *परिणाम* (*outcomes*) क्या हैं? स्पष्टतः जब पासा गिरेगा, तो कोई भी फलक सबसे ऊपर आ सकता है। अतः प्रत्येक फलक की संख्या संभाव्य परिणाम हो सकती है। चूंकि पासा सु-संतुलित है, अतः कोई भी संख्या, मान लीजिए '2', का ऊपरी फलक पर आना उतना ही संभाव्य है जितना कि किसी अन्य संख्या 1, 3, 4, 5 या 6 का।

किसी पासे को एक बार उछालने पर चूंकि यहाँ छः *सम-संभावी* (*equally likely*) परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 या 6 हैं और अंक '2' की प्राप्ति का एक ही अवसर है, इसलिए अंक '2' के ऊपर आने की संभावना 6 में से 1 है। दूसरे शब्दों में, हम कहते हैं कि '2' की प्राप्ति की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। हम इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

इसी प्रकार, जब एक सामान्य सिक्के को उछाला जाता है, तब वह चित (H) या पट (T) (आकृति 15.10) ऊपर दर्शाएगा।



चित पट

आकृति 15.10

हम देखते हैं कि यहाँ केवल दो सम-संभावी परिणाम हैं, जिनमें से केवल एक ही चित आने के अनुकूल है। इसलिए, सिक्के के एक बार की उछाल में चित आने की प्रायिकता

$$P(H) = \frac{1}{2}$$

के द्वारा दी जाती है।

इन उदाहरणों से प्रायिकता की परिभाषा निम्न प्रकार दी जा सकती है (यह मानते हुए कि *परिणाम सम-संभावी* हैं)।

किसी घटना E की प्रायिकता, जिसे P(E) से दर्शाते हैं, निम्न से प्राप्त होती है :

$$P(E) = \frac{\text{E के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल संभाव्य परिणामों की संख्या}}$$

पासे को उछालने वाले उपर्युक्त उदाहरण में, पासे पर संख्या '2' की प्राप्ति एक घटना (event) E थी। इसी प्रकार, एक सिक्के को उछालने वाले उदाहरण में चित (H) की प्राप्ति एक घटना E थी।

आगे बढ़ने से पहले, हम पासे की एकल (single) उछाल से संबंधित निम्नलिखित दो प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करते हैं :

(i) किसी पासे के ऊपरी फलक पर संख्या 8 के आने की प्रायिकता क्या है?

हमें ज्ञात है कि एक पासे को एक बार उछालने पर केवल छ: संभाव्य परिणाम होते हैं। यह 1 से 6 तक कोई भी अंक दर्शा सकता है। चूंकि पासे के किसी भी फलक पर 8 अंकित नहीं है, अत: यह स्पष्ट है कि हमें संख्या 8 की प्राप्ति कभी नहीं होगी, अर्थात् संख्या 8 की प्राप्ति असंभव है। ऐसी घटना को *असंभव घटना* (*impossible event*) कहते हैं।

अब, $$P(\text{पासे की एक उछाल में 8 की प्राप्ति}) = \frac{0}{6} = 0$$

इसलिए, हम कहते हैं कि *किसी असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।*

(ii) 7 से कम अंक की प्राप्ति की प्रायिकता क्या है?

चूंकि पासे के प्रत्येक फलक पर अंकित संख्या 7 से कम है, अत: यह स्पष्ट है कि हमें हमेशा 7 से कम अंक प्राप्त होगा, अर्थात् 7 से कम अंक की प्राप्ति एक *निश्चित घटना* (*sure event*) है।

अब, $$P(\text{7 से कम अंक की प्राप्ति}) = \frac{6}{6} = 1$$

इस प्रकार, *एक निश्चित घटना की प्रायिकता* 1 *होती है।*

इसलिए, किसी घटना E की प्रायिकता P(E) का मान 0 से लेकर 1 तक के बीच होता है, अर्थात्

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

हमें ज्ञात है कि एक सामान्य पासे की एकल उछाल में अंक 2 के आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। 2 से भिन्न कोई दूसरा अंक प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है? 2 से भिन्न अंक 1, 3, 4, 5 और 6 (अर्थात् 5 अनुकूल परिणाम) हैं। इसलिए

$$P(2 \text{ से भिन्न अंक की प्राप्ति}) = \frac{5}{6}$$

ध्यान दें कि $\quad P(2) + P(2 \text{ के अतिरिक्त अंक}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

इसको हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$P(2) = 1 - P(2 \text{ नहीं})$$

सामान्यतः, किसी घटना E के लिए,

$$P(E) = 1 - P(E \text{ नहीं})$$

या $\quad P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1 \quad (1)$

या $\quad P(E \text{ नहीं}) = 1 - P(E)$

होता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों पर ध्यान दें।

उदाहरण 14 : एक पासे को एक बार उछाला जाता है। संख्या 3 या 4 की प्राप्ति की प्रायिकता क्या है?

हल : कुल छः परिणामों (1, 2, 3, 4, 5, 6) में से इस स्थिति के अनुकूल परिणाम दो (अर्थात् 3 या 4) हैं।

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रायिकता} = P(3 \text{ या } 4) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभाव्य परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 15 : एक पासे की एकल उछाल में विषम अंक के आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल छ: संभाव्य परिणामों में से तीन परिणाम (1, 3, 5) अनुकूल हैं। इसलिए

$$P(\text{एक विषम अंक की प्राप्ति}) = P(1, 3, 5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 16 : अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता खींचा गया है। एक इक्के की प्राप्ति की प्रायिकता क्या है?

हल : चूंकि पत्ते अच्छी तरह से फेंटे गए हैं, अत: परिणाम सम-संभावी होंगे। गड्डी में 4 इक्के होते हैं।

इस प्रकार, अनुकूल परिणामों की संख्या = 4

संभाव्य परिणामों की कुल संख्या = 52

$$\therefore \quad P(\text{एक इक्का}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

टिप्पणी : ताश के पत्तों की एक गड्डी में 52 पत्ते होते हैं, जो प्रत्येक 13 पत्तों के चार समूहों (suits) में बँटे होते हैं - यथा हुकुम (♠), पान (♥), ईंट (♦) एवं चिड़ी (♣)। प्रत्येक समूह में पत्ते-इक्का, बादशाह, बेगम, गुलाम, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 और 2 होते हैं।

उदाहरण 17 : एक थैले में 3 लाल और 2 नीली गोलियाँ हैं। एक गोली यादृच्छया (at random) निकाली जाती है। नीली गोली के निकलने की प्रायिकता क्या है?

हल : गोली को यादृच्छिक रूप से निकालने का अर्थ है कि परिणाम सम-संभावी हैं।

परिणामों की कुल संख्या = 3 + 2 = 5

चूंकि थैले में 2 नीली गोलियाँ हैं, अत:

कुल 5 परिणामों में से, अनुकूल परिणाम = 2

$$\text{इसलिए,} \quad P(\text{एक नीली गोली}) = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 18 : अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता खींचा गया है। लाल रंग के एक बादशाह के प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : 52 पत्तों की गड्डी में चार बादशाह होते हैं, किंतु केवल पान एवं ईंट के बादशाह लाल होते हैं।

इसलिए, अनुकूल परिणामों की संख्या = 2

संभाव्य परिणामों की कुल संख्या = 52

$$\therefore \quad P(\text{लाल रंग का बादशाह}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

प्रश्नावली 15.3

1. किसी पासे को एक बार उछालने पर 5 से कम अंक प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

2. एक थैले में 3 लाल, 5 काली और 4 सफेद गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली गई। निकाली गई गेंद के :

   (i) सफेद (ii) लाल (iii) काली

   होने की प्रायिकता क्या है?

3. अच्छी प्रकार फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी से एक पत्ता खींचा गया है। खींचे गए पत्ते का

   (i) इक्का
   (ii) हुकुम की दुक्की
   (iii) काले रंग का दहला

   होने की प्रायिकता क्या है?

4. यह ज्ञात है कि बिजली के 600 बल्बों की एक पेटी में 12 बल्ब त्रुटिपूर्ण हैं। इस पेटी से एक बल्ब यदृच्छया निकाला जाता है। बल्ब के ठीक निकलने की प्रायिकता क्या है?

5. 17 कार्ड, जिन पर 1, 2, 3, ..., 16, 17 संख्याएँ अंकित हैं, एक पेटी में रखे गए हैं और उन्हें अच्छी तरह से मिलाया गया है। एक व्यक्ति पेटी में से एक कार्ड निकालता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाले गए कार्ड पर संख्या

   (i) विषम हो। (ii) अभाज्य हो।
   (iii) 3 से विभाज्य हो। (iv) 3 और 2 दोनों से विभाज्य हो।

6. किसी लाटरी की 1000 टिकटें बेची गईं और उन पर 5 पुरस्कार रखे गए हैं। यदि साकेत ने लाटरी का एक टिकट खरीदा हो, तो उसके पुरस्कार जीतने की प्रायिकता क्या है?

7. अच्छी तरह से फेंटी गई ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला गया है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता

(i) एक चित्र पत्ता (a face card) होगा।

(ii) एक लाल चित्र पत्ता होगा।

[**संकेत :** इक्का, बादशाह, बेगम और गुलाम चित्र पत्ते कहे जाते हैं।]

8. किसी पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित की प्राप्ति की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) सम संख्या।

(ii) 3 से बड़ी संख्या।

(iii) 3 और 6 के बीच की संख्या।

9. 52 पत्तों की ताश की गड्डी से चिड़ी के बादशाह, बेगम और गुलाम को अलग करके शेष को अच्छी तरह से फेंट दिया गया है। शेष पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्न की प्राप्ति की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(i) पान। (ii) बादशाह।

(iii) चिड़ी। (iv) पान का दहला।

10. एक पेटी में रखे कार्डों पर 2 से 101 तक की संख्याएँ अंकित हैं। उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया है। इस पेटी में से एक कार्ड निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कार्ड पर अंकित संख्या

(i) एक सम संख्या है।

(ii) 14 से कम संख्या है।

(iii) एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

(iv) 20 से कम एक अभाज्य संख्या है।

11. एक बालक के पास घन के आकार का एक ब्लाक है, तथा उसके प्रत्येक फलक पर एक अक्षर लिखा है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

A	B	C	D	E	A

घन को एक बार उछाला गया। प्राप्त अक्षर के

(i) A (ii) D

होने की प्रायिकता क्या है?

12. यदि किसी खेल में जीतने की प्रायिकता 0.3 हो, तो उस खेल में हारने की प्रायिकता क्या है?

13. एक थैले में पाँच लाल, आठ सफेद, चार हरी और सात काली गेंदें हैं। एक गेंद यदृच्छया थैले से निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद

(i) काली होगी।

(ii) लाल होगी।

(iii) हरी नहीं होगी।

14. एक थैले में 5 लाल और कुछ नीली गेंदें हैं। यदि नीली गेंद को निकालने की प्रायिकता, लाल गेंद को निकालने की प्रायिकता से दुगुनी हो, तो थैले में रखी नीली गेंदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

15. एक थैले में 12 गेंदें रखी हैं, जिनमें से x सफेद हैं।

(i) यदि एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाली गई गेंद सफेद है?

(ii) यदि थैले में 6 सफेद गेंदें और रख दी जाएँ, तो सफेद गेंद के निकालने की प्रायिकता पहली प्रायिकता की दुगुनी हो जाती है। x ज्ञात कीजिए।

16. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। निम्नलिखित की प्राप्ति की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(i) दो चित (ii) कम से कम एक चित (iii) कोई चित नहीं।

[**संकेत :** संभाव्य परिणाम हैं : HH, HT, TH, TT]

17. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) निश्चित घटना की. प्रायिकता ....होती है।

(ii) असंभव घटना की प्रायिकता ....होती है।

(iii) किसी घटना (निश्चित और असंभव घटनाओं के अतिरिक्त) की प्रायिकता ....के बीच में होती है।

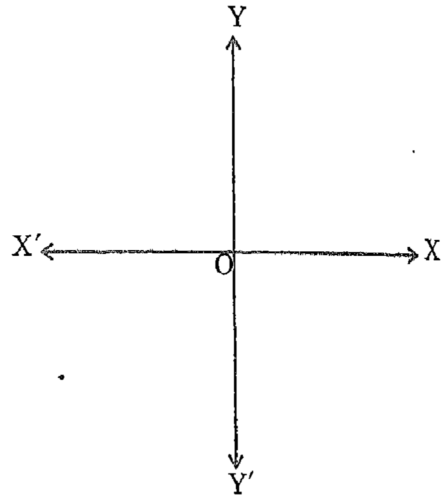
(iv) एक पासे को एक बार उछाला गया। अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ....है।

अध्याय 16

निर्देशांक ज्यामिति

16.1 भूमिका

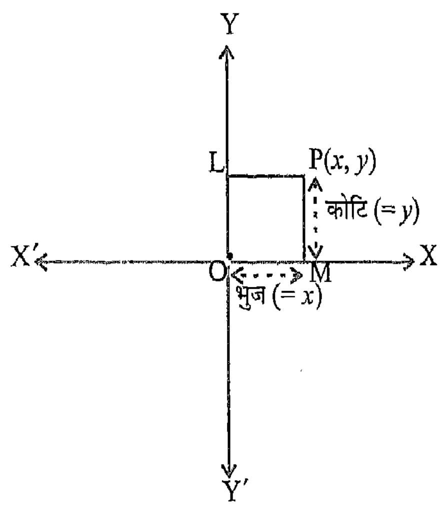
बिंदु को तल पर आलेखित करने की प्रक्रिया से आप पिछली कक्षाओं से ही परिचित हैं। स्मरण कीजिए कि इस प्रक्रिया में दो लंबवत रेखाएँ X′OX और Y′OY बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं। X′OX तथा Y′OY को *निर्देशांक अक्ष* (*coordinate axes*) कहते हैं। X′OX को x-अक्ष, Y′OY को y-अक्ष तथा O को *मूलबिंदु* (*origin*) कहते हैं। चूंकि X′OX तथा Y′OY परस्पर लंब हैं, अत: X′OX तथा Y′OY को कभी-कभी *समकोणिक अक्ष* (*rectangular axes*) भी कहते हैं (आकृति 16.1)।



आकृति 16.1

16.2 बिंदु के निर्देशांक

मान लीजिए P कोई बिंदु है, जैसा कि आकृति 16.2 में दिखाया गया है। P से क्रमश: x-अक्ष और y-अक्ष पर PM तथा PL लंब खींचिए। लंबाई PL (या OM) को बिंदु P का x-निर्देशांक या *भुज* (*abscissa*) तथा लंबाई PM को बिंदु P का y-निर्देशांक या उसकी *कोटि* (*ordinate*) कहते हैं। बिंदु जिसका भुज x तथा कोटि y हो, बिंदु (x, y) अर्थात् $P(x, y)$ कहलाता है। बिंदु के निर्देशांक लिखते समय x-निर्देशांक पहले तथा y-निर्देशांक उसके बाद लिखते हैं तथा इन्हें अल्पविराम (,) से अलग करते



आकृति 16.2

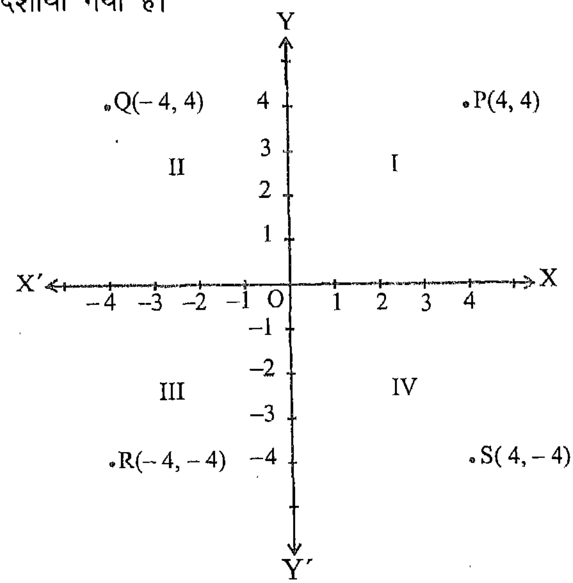
हुए छोटे कोष्ठक ( ) में लिखते हैं। यथा, बिंदु (x, y) और (y, x) भिन्न हैं जब तक कि $x \neq y$ हो। बिंदुओं को अंग्रेजी के बड़े अक्षर P, Q, R, A, B इत्यादि द्वारा व्यक्त करते हैं।

दोनों रेखाएँ X′OX तथा Y′OY तल को चार भागों में विभक्त करती हैं, जिन्हें *चतुर्थांश* (*quadrants*) कहते हैं। XOY, YOX′, X′OY′ और Y′OX को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय और चतुर्थ चतुर्थांश कहते हैं। हम OX, OY दिशाओं को प्रायः धनात्मक और OX′, OY′ को ऋणात्मक लेते हैं।

नीचे दी हुई सारणी भिन्न-भिन्न चतुर्थांशों में स्थित बिंदुओं के निर्देशांकों के चिह्न दर्शाती है :

चतुर्थांश	x - निर्देशांक	y - निर्देशांक	बिंदु
प्रथम चतुर्थांश	+	+	(+ , +)
द्वितीय चतुर्थांश	–	+	(– , +)
तृतीय चतुर्थांश	–	–	(– , –)
चतुर्थ चतुर्थांश	+	–	(+ , –)

इस प्रकार, बिंदु P(4, 4), Q(– 4, 4), R(– 4, – 4) तथा S(4, – 4) विभिन्न चतुर्थांशों में हैं, जैसा कि आकृति 16.3 में दर्शाया गया है।



आकृति 16.3

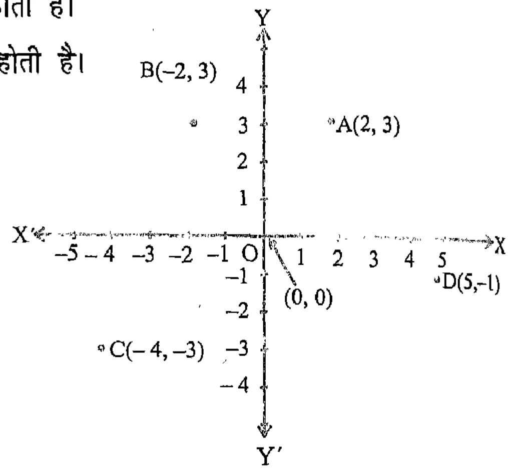
ध्यान दीजिए कि

1. किसी बिंदु का भुज, बिंदु की y-अक्ष से दूरी (लंबवत दूरी) है।
2. किसी बिंदु की कोटि, बिंदु की x-अक्ष से दूरी है।
3. भुज, y-अक्ष के दाईं ओर धनात्मक और बाईं ओर ऋणात्मक होता है।
4. कोटि, x-अक्ष के ऊपर धनात्मक और नीचे ऋणात्मक होती है।
5. किसी भी बिंदु का भुज y-अक्ष पर शून्य होता है।
6. किसी भी बिंदु की कोटि x-अक्ष पर शून्य होती है।
7. मूलबिंदु के निर्देशांक (0,0) होते हैं।

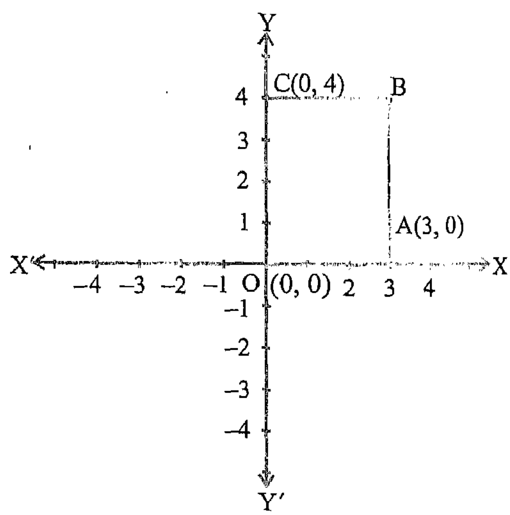
अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

उदाहरण 1: समकोणिक निर्देशांक निकाय में बिंदु (0, 0), (2, 3), (–2, 3), (– 4, –3) और (5, –1) को आलेखित कीजिए।

हल : हम समकोणिक निर्देशांक अक्ष X′OX और Y′OY लेते हैं और बिंदुओं (0, 0), (2, 3), (–2, 3), (– 4, –3) तथा (5, –1) को क्रमशः O, A, B, C तथा D से चिह्नित करते हैं (आकृति 16.4)।



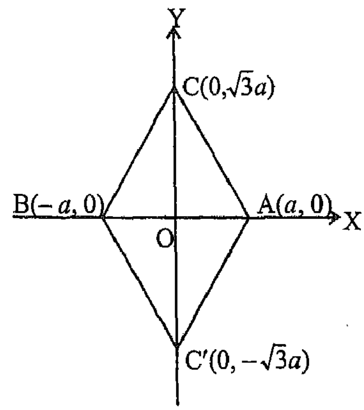
आकृति 16.4



आकृति 16.5

आयत बनाने के लिए हम x-अक्ष और y-अक्ष पर स्थित क्रमशः बिंदुओं A और C से लंब खींचते हैं। मान लीजिए ये लंब, बिंदु B पर मिलते हैं। इस प्रकार, हमें आयत OABC प्राप्त होता है, जैसा कि आकृति 16.5 में दर्शाया गया है। हम जानते हैं कि आयत की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं। अतः AB = OC तथा OA = CB है। इस प्रकार, B का भुज 3 है तथा कोटि 4 है। अतः, चौथे बिंदु B के निर्देशांक (3, 4) हैं।

उदाहरण 3 : भुजा $2a$ वाले दो समबाहु त्रिभुज ABC तथा ABC′ का आधार AB, x-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार स्थित है कि AB का मध्य-बिंदु, मूलबिंदु है, जैसा कि आकृति 16.6 में दर्शाया गया है। त्रिभुजों के शीर्षों C तथा C′ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.6

हल : माना कि समबाहु त्रिभुज के आधार AB की लंबाई $2a$ है। चूंकि AB = $2a$ है, अतः AO = OB = a है। समबाहु त्रिभुज का तीसरा शीर्ष आधार के लंब समद्विभाजक पर स्थित होना चाहिए। चूंकि y-अक्ष, AB का लंब समद्विभाजक है, अतः C (या C′) को y-अक्ष पर स्थित होना चाहिए। इस प्रकार, हमें आकृति 16.6 में दिए गए अनुसार दो त्रिभुज ABC तथा ABC′ प्राप्त होते हैं।

यहाँ A, $(a, 0)$ तथा B, $(-a, 0)$ है। अब त्रिभुज AOC तथा त्रिभुज AOC′ समकोण त्रिभुज हैं। OC और OC′, y-अक्ष पर स्थित हैं। अतः, बिंदुओं C तथा C′ का x निर्देशांक शून्य है।

अब Δ AOC से, हम पाते हैं कि $AC^2 = AO^2 + OC^2$

या $4a^2 = a^2 + OC^2$

या $OC = \sqrt{3}\,a$

अतः, बिंदु C के निर्देशांक $(0, \sqrt{3}a)$ हैं।

इसी प्रकार, बिंदु C′ के निर्देशांक $(0, -\sqrt{3}a)$ हैं।

प्रश्नावली 16.1

1. समकोणिक निर्देशांक निकाय में निम्न बिंदुओं को आलेखित कीजिए। वे किस चतुर्थांश में स्थित हैं?

   (i) (4, 5) (ii) (4, –5) (iii) (–10, 2)

   (iv) (–10, –2) (v) (–7, 5) (vi) (9, –3)

2. बिंदुओं (–1, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 2), (–1, 1) को आलेखित कीजिए और उन्हें क्रम से मिलाइए। आपको कौन-सी आकृति प्राप्त होती है?

3. किस चतुर्थांश में बिंदु होगा यदि उसकी (उसका)

   (i) कोटि 3 और भुज – 4 के बराबर हो?

   (ii) भुज – 5 और कोटि –3 के बराबर हो?

   (iii) कोटि 4 और भुज 5 के बराबर हो?

   (iv) कोटि 4 और भुज – 4 के बराबर हो?

4. चतुर्भुज को बनाइए, यदि उसके शीर्ष निम्न हों :

   (i) (1, 1), (2, 4), (8, 4) तथा (10, 1)

   (ii) (– 2, – 2), (– 4, 2), (– 6, – 2) तथा (– 4, – 6)

   प्रत्येक स्थिति में, इस तरह से बने चतुर्भुज का प्रकार बताइए।

16.3 दो बिंदुओं के बीच की दूरी

बहुत से प्रश्नों में दो बिंदुओं के बीच की दूरी या दो बिंदुओं को मिलाने से बने रेखाखंड की लंबाई की आवश्यकता पड़ती है, जिसे बिंदुओं के निर्देशांकों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अब हम किन्हीं दो बिंदुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी के लिए सूत्र ज्ञात करते हैं।

O को मूलबिंदु मानते हुए दो परस्पर लंबवत रेखाएँ, निर्देशांक अक्षों के रूप में लीजिए। $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ चिह्नित कीजिए। बिंदुओं P और Q से x-अक्ष पर क्रमशः PA और QB लंब खींचिए जो x-अक्ष पर क्रमशः A तथा B पर मिलते हैं (आकृति 16.7)।

PC और QD, y-अक्ष पर लंब खींचिए, जो y-अक्ष को क्रमशः C तथा D पर मिलते हैं। CP को आगे बढ़ाने पर यह BQ को R पर मिलती है। अब,

$$OA = P \text{ का भुज} = x_1$$

इसी प्रकार, $OB = x_2$, $OC = y_1$ तथा $OD = y_2$

इस प्रकार, आकृति 16.7 से, हम प्राप्त करते हैं कि

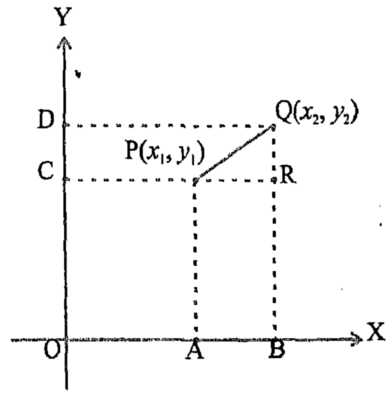
$$PR = AB = OB - OA = x_2 - x_1$$

इसी प्रकार, $QR = QB - RB = QB - PA = y_2 - y_1$

समकोण त्रिभुज PRQ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

या $$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



आकृति 16.7

चूंकि दूरी या रेखाखंड PQ की लंबाई सदैव ऋणेतर होती है, इसलिए धनात्मक वर्गमूल लेने पर, हम दूरी को निम्न रूप में पाते हैं :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

इस परिणाम को *दूरी सूत्र* (*distance formula*) कहते हैं।

उपप्रमेय : बिंदु $P(x, y)$ की मूलबिंदु (0, 0) से दूरी निम्न रूप में दी जाती है :

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

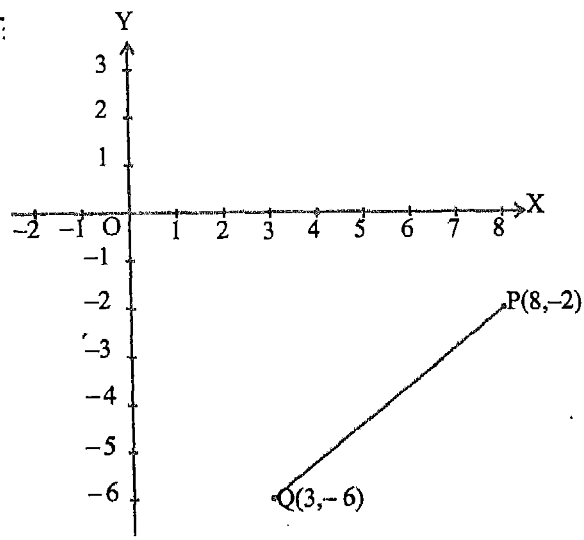
उदाहरण 4 : बिंदुओं (8, –2) और (3, – 6) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि बिंदु P और Q क्रमश: (8, –2) तथा (3, – 6) हैं (आकृति 16.8)। तब दूरी सूत्र का उपयोग करने पर,

$$PQ = \sqrt{(3-8)^2 + (-6+2)^2}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{41}$$



आकृति 16.8

उदाहरण 5: सिद्ध कीजिए कि बिंदु $(1, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ और $(1, 2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : मान लीजिए कि हम बिंदुओं $(1, -1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ और $(1, 2)$ को क्रमशः P, Q और R से दर्शाते हैं (आकृति 16.9)।

अब,

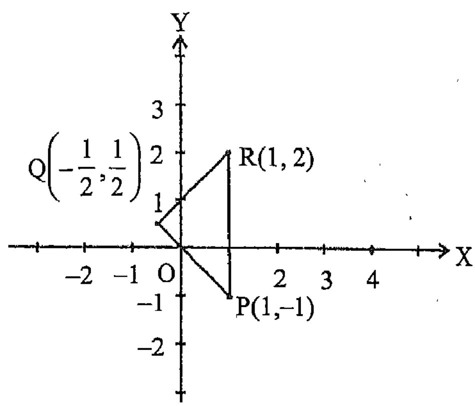
$$PQ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$QR = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$PR = \sqrt{(1-1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{9} = 3$$



आकृति 16.9

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि

$$PQ = QR$$

है। अतः, त्रिभुज समद्विबाहु है।

उदाहरण 6 : दूरी सूत्र का उपयोग करते हुए, दर्शाइए कि बिंदु $(-3, 2)$, $(1, -2)$ और $(9, -10)$ संरेख हैं।

हल : मान लीजिए कि बिंदु $(-3, 2)$, $(1, -2)$ और $(9, -10)$ क्रमशः A, B तथा C से व्यक्त होते हैं। बिंदु A, B तथा C संरेख होंगे, यदि दो रेखाखंडों का योग तीसरे रेखाखंड के बराबर होगा।

अब, $$AB = \sqrt{(1+3)^2+(-2-2)^2}$$

$$= \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2} = \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2}$$

चूंकि $AB + BC = 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = AC$ है, इसलिए बिंदु A, B तथा C संरेख हैं।

उदाहरण 7: x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं (5, 4) और (– 2, 3) से समदूरस्थ हो।

हल : चूंकि अभीष्ट बिंदु (माना P) x-अक्ष पर स्थित है, अत: इसकी कोटि शून्य है। माना इस बिंदु का भुज x है। अत:, बिंदु P के निर्देशांक $(x, 0)$ हैं।

मान लीजिए A और B क्रमश: बिंदुओं (5, 4) और (– 2, 3) को व्यक्त करते हैं।

चूंकि AP = BP दिया है, अत:

$$AP^2 = BP^2$$

अर्थात् $\quad (x-5)^2 + (0-4)^2 = (x+2)^2 + (0-3)^2$

या $\quad x^2 + 25 - 10x + 16 = x^2 + 4 + 4x + 9$

या $\quad -14x = -28$

या $\quad x = 2$

इस प्रकार, अभीष्ट बिंदु (2, 0) है।

उदाहरण 8 : किसी त्रिभुज के शीर्ष (–2, 0), (2, 3) तथा (1, –3) हैं। क्या यह त्रिभुज समबाहु, समद्विबाहु या विषमबाहु है?

हल : मान लीजिए बिंदु (–2, 0), (2, 3) तथा (1, –3) क्रमश: A, B तथा C द्वारा व्यक्त होते हैं। तब,

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

और $\quad AC = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

स्पष्टत:, $AB \neq BC \neq AC$ है।

अत:, ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 9 : एक रेखाखंड की लंबाई 10 है। यदि इसका एक सिरा (2, –3) हो तथा दूसरे सिरे का भुज 10 हो, तो दर्शाइए कि इसकी कोटि 3 अथवा – 9 होगी।

हल : माना (2, –3) बिंदु A है तथा दूसरे सिरे B की कोटि y है। तब B के निर्देशांक (10, y) होंगे।

अब, $AB = \sqrt{(10-2)^2 + (y+3)^2} = 10$ (दिया है)

या $64 + 9 + y^2 + 6y = 100$

या $y^2 + 6y + 73 - 100 = 0$

या $y^2 + 6y - 27 = 0$

या $(y+9)(y-3) = 0$

या $y = -9$ अथवा $y = 3$

अर्थात्, दूसरे सिरे की कोटि 3 अथवा – 9 है।

उदाहरण 10 : यदि बिंदु $P(x, y)$ बिंदुओं $A(5, 1)$ तथा $B(-1, 5)$ से बराबर दूरी पर स्थित हो, तो सिद्ध कीजिए कि $3x = 2y$ है।

हल : $P(x, y)$, $A(5, 1)$ तथा $B(-1, 5)$ बिंदु दिए हैं।

चूंकि $AP = BP$ है,

इसलिए $AP^2 = BP^2$

या $AP^2 - BP^2 = 0$

या $\{(x-5)^2 + (y-1)^2\} - \{(x+1)^2 + (y-5)^2\} = 0$

या $x^2 + 25 - 10x + y^2 + 1 - 2y - x^2 - 1 - 2x - y^2 - 25 + 10y = 0$

या $-12x + 8y = 0$

या $3x = 2y$

उदाहरण 11 : दर्शाइए कि बिंदु $(-2, 5)$, $(3, -4)$ तथा $(7, 10)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : मान लीजिए तीनों बिंदु A (–2, 5), B (3, – 4) तथा C (7, 10) हैं (आकृति 16.10)।

तब, $AB^2 = (3 + 2)^2 + (-4 \ -5)^2 = 106$

$BC^2 = (7 - 3)^2 + (10 + 4)^2 = 212$

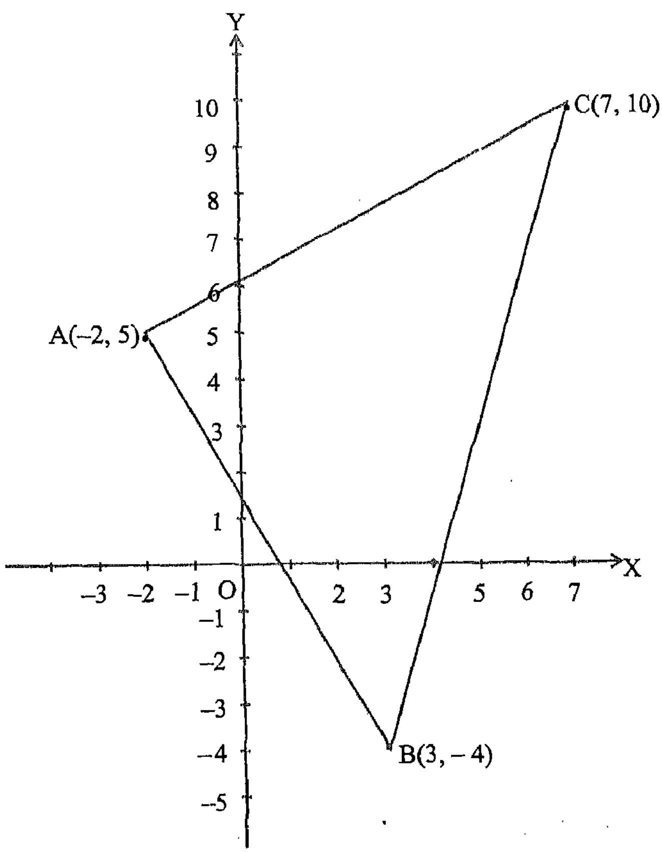
$AC^2 = (7 + 2)^2 + (10 - 5)^2 = 106$

हम देखते हैं कि

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\therefore \quad \angle A = 90°$$

अतः, त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका ∠A समकोण है।



आकृति 16.10

प्रश्नावली 16.2

1. निम्न में बिंदुओं A और B के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

(i) A(0, 0), B(–5, 12) (ii) A(1, –3), B(4, 1)

(iii) A(–1, –1), B(8, –2) (iv) A(5, – 8), B(–7, –3)

2. जाँच कीजिए कि क्या बिंदु (7,3) से बिंदु (20, 3) (19, 8) तथा (2, –9) समदूरस्थ हैं।

प्रश्नों 3 और 4 में दिए गए बिंदु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

3. $(a, 0)$, $(0, a)$

4. (a, b), $(-b, a)$

दूरी सूत्र की सहायता से ज्ञात कीजिए कि क्या प्रश्न 5 से 7 तक में दिए गए बिंदु संरेख हैं।

5. (1, 2), (5, 3) और (18, 6)

6. (4, 3), (5, 1) और (1, 9)

7. (2, 5), (–1, 2) और (4, 7)

ज्ञात कीजिए कि क्या प्रश्नों 8 और 9 में दिए गए बिंदु एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

8. (–2, 1) (2, –2) और (5, 2)

9. (8, 4), (5, 7) और (–1, 1)

ज्ञात कीजिए कि क्या प्रश्नों 10 और 11 में दिए गए बिंदु एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

10. (10, –18), (3, 6) और (–5, 2)

11. (6, 6), (5, 2) और (2, 5)

12. x-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (– 2, 5) तथा (2, –3) से समदूरस्थ है।

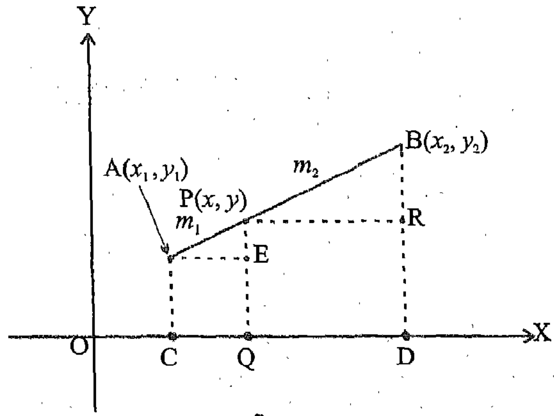
13. y-अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (–5, –2) तथा (3, 2) से समदूरस्थ है।

14. यदि बिंदुओं $(3, k)$ तथा $(k, 5)$ से बिंदु (0,2) की दूरियाँ बराबर हों, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

16.4 विभाजन सूत्र

आइए बिंदु $P(x, y)$ के निर्देशांक ज्ञात करें जो रेखाखंड AB को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अंतः विभाजित करता है, जबकि $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ है।

हम A, B तथा P से x-अक्ष पर लंब खींचते हैं, जो x-अक्ष से क्रमशः बिंदुओं C, D तथा Q पर मिलते हैं (आकृति 16.11)। साथ ही, A तथा P से x-अक्ष के समांतर रेखा खींचते हैं, जो PQ तथा BD को क्रमशः बिंदुओं E और R पर मिलती है।



आकृति 16.11

आकृति 16.11 से यह स्पष्ट है कि Δ AEP और Δ PRB समरूप हैं और इसीलिए

$$\frac{AE}{PR} = \frac{EP}{RB} = \frac{AP}{PB} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (1)$$

अब $\quad AE = CQ = OQ - OC = x - x_1$

$PR = QD = OD - OQ = x_2 - x$

$EP = QP - QE = QP - CA = y - y_1$

और $\quad RB = DB - DR = DB - QP = y_2 - y$

उपर्युक्त को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_1}{m_2}$$

इस प्रकार, $\quad \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{m_1}{m_2}$

या $\quad m_2 (x - x_1) = m_1 (x_2 - x)$

या $\quad m_2 x - m_2 x_1 = m_1 x_2 - m_1 x$

या $\quad x(m_1 + m_2) = m_1 x_2 + m_2 x_1$

या $$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$$

इसी प्रकार, $$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$$

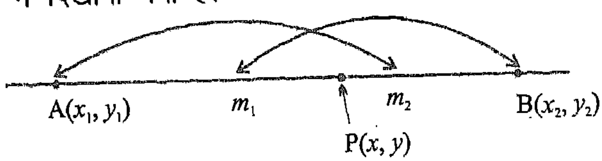
अत: उस बिंदु P, जो बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अंत: विभाजित करता है, के निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

हैं।

इसे *विभाजन सूत्र (section formula)* कहते हैं।

टिप्पणी : अंत: विभाजन के विभाजन सूत्र को याद रखने के लिए यह देखना सहायक है कि m_1 को इससे दूर रहने वाले निर्देशांक से गुणा करना होता है और इसी प्रकार m_2 को भी इससे दूर रहने वाले निर्देशांक से गुणा करके, इनके योगफल को $(m_1 + m_2)$ से भाग देते हैं। इसे आकृति 16.12 में दिखाया गया है।



आकृति 16.12

विशेष स्थितियाँ

1. बिंदु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु रेखाखंड को 1 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है। अत: $m_1 = 1$ और $m_2 = 1$ को (2) में रखने पर, हमें मध्य-बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ प्राप्त होते हैं।

2. (2) में $m_1 = k$ तथा $m_2 = 1$ रखने पर, हमें बिंदुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $k : 1$ के अनुपात में अंतः विभाजित करने वाले बिंदु P के निर्देशांक

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right)$$

प्राप्त होते हैं।

k के विभिन्न मानों के लिए, हमें रेखाखंड पर विभिन्न बिंदु प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 12: उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (3, 5) तथा (7, 9) को मिलाने वाले रेखाखंड को 2 : 3 के अनुपात में अंतः विभाजित करता है।

हल : हमें प्राप्त है :

$$x_1 = 3, x_2 = 7, y_1 = 5, y_2 = 9, m_1 = 2 \quad \text{और} \quad m_2 = 3$$

अतः
$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 7 + 3 \times 3}{2+3} = \frac{23}{5}$$

$$y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 9 + 3 \times 5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

अतः, अभीष्ट निर्देशांक $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$ हैं।

उदाहरण 13 : उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो (– 7, 4) और (– 6, – 5) को मिलाने वाले रेखाखंड को 7 : 2 के अनुपात में अंतः विभाजित करता है।

हल : माना अभीष्ट बिंदु (x, y) है। तब

$$x = \frac{7(-6) + 2(-7)}{7+2} = \frac{-42 - 14}{9} = -\frac{56}{9}$$

$$y = \frac{7(-5) + 2(4)}{7+2} = \frac{-35 + 8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

अतः, अभीष्ट बिंदु $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$ है।

उदाहरण 14: बिंदु (– 3, 5) और (4, – 9) को मिलाने वाले रेखाखंड को बिंदु (–2, 3) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मान लीजिए कि वांछित अनुपात $m_1 : m_2$ है। तब सूत्र की सहायता से, हम पाते हैं कि

$$-2 = \frac{m_1(4)+m_2(-3)}{m_1+m_2}$$

या $\quad -2\,m_1 - 2\,m_2 = 4\,m_1 - 3\,m_2$

या $\quad m_2 = 6\,m_1$

या $\quad m_1 : m_2 = 1 : 6$

अत:, अभीष्ट अनुपात 1 : 6 है।

टिप्पणी : यदि हम कोटि के मान से आरंभ करें, तो भी हमें $\frac{m_1}{m_2}$ का यही मान प्राप्त होगा।

उदाहरण 15: बिंदुओं (15, 5) तथा (9, 20) को मिलाने वाले रेखाखंड को बिंदु (11, 15) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : मान लीजिए बिंदु (11, 15), बिंदुओं (15, 5) तथा (9, 20) को मिलाने वाले रेखाखंड को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब,

$x_1 = 15, y_1 = 5, x_2 = 9, y_2 = 20, x = 11$ और $y = 15$ है।

$$\therefore \quad x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1},\ y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}$$

$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1}$ से, हम पाते हैं कि

$$11 = \frac{k \times 9 + 15}{k+1}$$

$\therefore \quad 11k + 11 = 9k + 15$

या $\quad 2k = 4$

या $\quad k = 2$

अत:, अभीष्ट अनुपात 2 : 1 है।

टिप्पणी : y के मान से भी हमें यही अनुपात प्राप्त होगा।

16.5 विभाजन सूत्र का अनुप्रयोग

यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष दिए हों, तो विभाजन सूत्र की सहायता से हम त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक ज्ञात करेंगे। स्मरण कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती हैं। संगमन बिंदु को केंद्रक कहते हैं। यह बिंदु प्रत्येक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

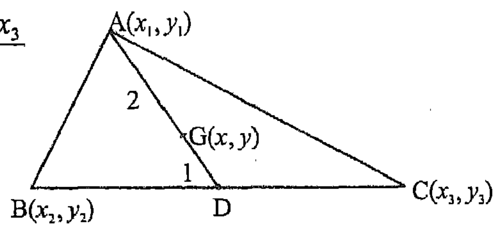
मान लीजिए कि बिंदु A, B और C के निर्देशांक क्रमश: (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हैं और बिंदु D, भुजा BC का मध्य-बिंदु है, जैसा कि आकृति 16.13 में दिखाया गया है।

$$\therefore \qquad D = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

मान लीजिए त्रिभुज का केंद्रक $G(x, y)$ है। हम जानते हैं कि बिंदु G, AD को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।

अत:

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2 + x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$



आकृति 16.13

तथा

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2 + y_3}{2} + 1 \times y_3}{2+1}$$

$$= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

इस प्रकार, त्रिभुज का केंद्रक $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ है।

उदाहरण 16 : त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक (1, 3) हैं तथा त्रिभुज के दो शीर्ष (–7, 6) तथा (8, 5) हैं। त्रिभुज का तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए त्रिभुज का तीसरा शीर्ष $P(x, y)$ है। त्रिभुज का केंद्रक (1, 3) दिया है।

अत:, $\quad \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1 \quad$ और $\quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 3$

अब $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$ से, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{-7+8+x}{3}=1$$

या $\quad x+1=3$

या $\quad x=2$

इसी प्रकार, $\frac{6+5+y}{3}=3$

या $\quad 11+y=9$

या $\quad y=-2$

अत:, तीसरे शीर्ष के निर्देशांक $(2, -2)$ हैं।

प्रश्नावली 16.3

1. बिंदुओं $(22, 20)$ और $(0, 16)$ को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

2. A और B के निर्देशांक $(1, 2)$ तथा $(2, 3)$ हैं। R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जबकि $\frac{AR}{RB}=\frac{4}{3}$ हो।

3. बिंदु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $P(-2, 3)$ तथा $Q(4, 7)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $\frac{4}{7}$ के अनुपात में अंत: विभाजित करता हो।

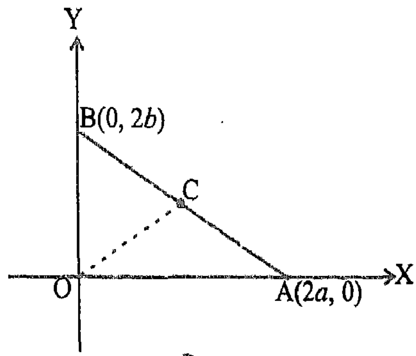
4. यदि A और B क्रमश: $(1, 4)$ तथा $(5, 2)$ हों, तो P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जबकि $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{4}$ है।

5. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं $(-3, -4)$ तथा $(-8, 7)$ को मिलाने वाले रेखाखंड को $7:5$ के अनुपात में अंत: विभाजित करता है।

6. बिंदुओं $(6, 4)$ तथा $(1, -7)$ को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष द्वारा किस अनुपात में विभाजित होगा?

7. बिंदुओं $(6, 8)$ तथा $(2, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य-बिंदु से बिंदु $(1, 2)$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि समकोण त्रिभुज BOA में कर्ण का मध्य-बिंदु C त्रिभुज के शीर्षों O, A तथा B से बराबर दूरी पर है (आकृति 16.14)।



आकृति 16.14

9. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाइयाँ ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष (1, –1), (0, 4) तथा (–5, 3) हैं।

10. दर्शाइए कि बिंदुओं (5, 7) और (3, 9) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु वही है जो बिंदुओं (8, 6) तथा (– 0, 10) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य-बिंदु है।

11. बिंदुओं (– 4, 0) और (0, 6) को मिलाने वाले रेखाखंड को 4 बराबर भागों में बाँटने वाले बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

प्रश्नों 12 से 14 में दिए गए प्रत्येक त्रिभुज का केंद्रक ज्ञात कीजिए, जबकि उसके शीर्ष दिए गए हैं :

12. (4, – 8), (– 9, 7), (8, 13)

13. (3, – 5), (– 7, 4), (10, – 2)

14. (2, 1), (5, 2), (3, 4)

15. त्रिभुज का तीसरा शीर्ष ज्ञात कीजिए, यदि उसके दो शीर्ष (– 3, 1) तथा (0, – 2) हों और उसका केंद्रक मूलबिंदु पर हो।

16. सिद्ध कीजिए कि आयत के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं।
[**संकेत :** O को मूलबिंदु मान कर आयत के शीर्ष (0, 0), (a, 0), (a, b) तथा (0, b) लीजिए।]

17. दर्शाइए कि बिंदु A(1, 0), B(5, 3), C(2, 7) तथा D(– 2, 4) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।
[**संकेत :** समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।]

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. $x = 2,\ y = 4$
2. $x = 1,\ y = 2$
3. $x = -2,\ y = -1$
4. कोई हल नहीं
5. $x = 2,\ y = 1$
6. कोई हल नहीं
7. अपरिमित रूप से अनेक हल
8. $x = 1,\ y = -1$
9. शीर्ष : (1, 0), (2, 4) तथा (3, 0)
10. शीर्ष : (5, 0), (0, 5), (0, – 5)

प्रश्नावली 1.2

1. $x = \frac{32}{5},\ y = \frac{3}{5}$
2. $x = -4,\ y = 11$
3. $x = \frac{54}{17},\ y = \frac{13}{17}$
4. $x = \frac{97}{31},\ y = \frac{52}{31}$
5. $x = 5,\ y = -2$
6. $x = 2,\ y = 3$
7. $x = 2,\ y = -1$
8. $x = -3,\ y = 4$
9. $x = 2,\ y = 1$
10. $x = 5,\ y = 7$
11. $x = 1,\ y = -2$
12. $x = \frac{3}{2},\ y = -\frac{2}{3}$
13. $x = -\frac{7}{5},\ y = -\frac{13}{5}$
14. $x = \frac{68}{47},\ y = \frac{25}{47}$
15. $x = -\frac{7}{87},\ y = \frac{170}{87}$
16. $x = \frac{45}{13},\ y = -\frac{53}{13}$
17. $x = 3,\ y = 4$
18. $x = \frac{407}{199},\ y = \frac{336}{199}$
19. $x = 15,\ y = -10$
20. $x = 1,\ y = 2$
21. $u = 5,\ v = \frac{1}{7}$
22. $v = \frac{1}{2},\ u = \frac{1}{3}$
23. $u = 1,\ v = \frac{3}{2}$

प्रश्नावली 1.3

1. $x = \frac{17}{7}, y = \frac{5}{7}$ **2.** $x = \frac{125}{41}, y = -\frac{89}{41}$ **3.** $x = 1, y = 2$

4. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{9}{5}$ **5.** $x = \frac{5}{2}, y = 0$ **6.** $x = -\frac{1}{24}, y = \frac{7}{4}$

7. $x = \frac{105}{706}, y = \frac{885}{706}$ **8.** $p \neq 6$ **9.** $p \neq -6$

10. $p \neq 12$ **11.** $p \neq -10$ **12.** $x = 1, y = -1$

13. $x = a, y = b$ **14.** $x = \frac{b^2}{2a}, y = \frac{2a^2+b^2}{2a}$ **15.** $x = a, y = b$

16. $x = a^2, y = b^2$ **17.** $x = a, y = b$

18. $x = \frac{bc - ac + b}{b^2 - a^2}, y = \frac{bc - ac - a}{b^2 - a^2}$

19. $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$

प्रश्नावली 1.4

1. राम : 45 वर्ष, रहीम : 15 वर्ष

2. नीता : 50 वर्ष, गीता : 20 वर्ष

3. $\frac{7}{9}$ **4.** $\frac{3}{5}$ **5.** $\frac{7}{9}$

6. 26 **7.** 18 **8.** 36

9. 20 रु, 100 रु **10.** 1700 रु

11. 75 रु, 215 रु **12.** लंबाई = 17 मात्रक, चौड़ाई = 9 मात्रक

13. लंबाई = 23 मात्रक, चौड़ाई = 11 मात्रक **14.** 3900 रु, 150 रु

15. 2100 रु, 25 रु **16.** $\angle A = 20°, \angle B = 40°, \angle C = 120°$

17. 41, एक **18.** $\angle A = 70°, \angle B = 53°, \angle C = 110°, \angle D = 127°$

19. 60 किमी / घं, 40 किमी / घं   **20.** 6 किमी / घं, 4 किमी / घं

21. 8 किमी / घं, 4 किमी / घं

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $(x+1)(x+2)$ (ii) $x(x+1)$ (iii) $2x^2(x+5)$

(iv) $4x(x+10)$ (v) $(2x+3)(3x+4)$ (vi) $x-2$

(vii) 1

2. (i) $(x+1)(x-2)$ (ii) $3x(x+1)$ (iii) $5(x+1)^2$

(iv) $3(x-3)$ (v) $3(x+1)$ (vi) $14(x-1)$

3. (i) $x+2$ (ii) $5x(x-3)$ (iii) $2x^3(x+3)$

(iv) $8x(x^2+x+1)$ (v) $8(x^4-1)$ (vi) $3(x-1)$

(vii) $2(x^2+x+1)$ (viii) $3(x^2-1)$ (ix) 1

4. (i) $x+5$ (ii) $2(x-7)$ (iii) $x-1$

(iv) 4 (v) 1

5. (i) $(x^2+1)(x+11)$ (ii) $(x^2+x+1)(x+13)$ (iii) $2x^2+3$

(iv) $8(x^2+1)$ (v) $(x+a)^2$

प्रश्नावली 2.2

1. (i) $(x-1)(x-2)(x-7)$ (ii) $(2x+3)^2(x+7)^2(4x+5)$

(iii) $12(x-5)^3(5x+1)$ (iv) $25(x+9)^2(x+8)^2$

(v) $4x^2(x+1)$ (vi) $(x^3-1)(x+1)$

(vii) $(2x^2+3)^2(x+3)^2$

2. (i) $(x-3)^4(x+2)^3(x+1)$ (ii) $8(x+1)^4(x-1)^3(x+2)^2$

(iii) $18(2x+3)^3(5x-7)(5x+6)$ (iv) $153x^5(x+4)(x-4)^4(x-3)^3$

3. (i) $121x^3(x+1)^3(2x+1)$ (ii) $75x(x^2-16)(x+3)$

(iii) $2x^2(8x^3+27)(x+3)$ (iv) $30(x+2)^3(x^3+1)$

4. (i) LCM : $(2x+1)^2(3x-5)^3$; HCF : $(2x+1)(3x-5)^2$

(ii) LCM : $(x+3)^2(x+4)^3(x+5)^2$; HCF : $(x+3)(x+4)$

(iii) LCM : $(x^3-1)(x+1)$; HCF : $x-1$

(iv) LCM : x^4-1 ; HCF : x^2-1

5. $10x(x-1)(x-2)(x+3)$ **6.** $(x^2+x-2)(x^2-5x+6)$

7. $a=2, b=-3$ **8.** $a=-2, b=-3$

9. $a=-3, b=6$ **10.** $k=5$

11. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य (v) असत्य

प्रश्नावली 3.1

1. (i) **2.** (i), (ii), (iv) **3.** $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$; $a \neq 0$; $p \neq 0$

4. $\frac{2x+1}{3x^2+x-1}$ इत्यादि **5.** $\frac{x^2-x-2}{2x^2-7x+3}$ **6.** $\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-1)(x-4)}$

प्रश्नावली 3.2

1. हाँ **2.** नहीं ; $\frac{1}{2x-1}$ **3.** नहीं ; $x-1$

4. नहीं ; $\frac{x-7}{x-2}$ **5.** नहीं ; $\frac{x-2}{x^2-2x+4}$ **6.** नहीं ; $\frac{x^2}{x^2-a^2}$

7. नहीं ; $\frac{x^2-5x+6}{x-8}$ **8.** नहीं ; x^2-x+1 **9.** नहीं ; $\frac{x^2}{x+6}$

10. नहीं ; $\frac{x-1}{x+1}$ **11.** नहीं ; $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ **12.** नहीं ; $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$

13. नहीं ; $2x(x-1)$ **14.** नहीं ; x^2+3x-4 **15.** नहीं ; $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2$

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\frac{2x}{x+3}$ (ii) $\frac{2x^2+8}{x^2-4}$

(iii) $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^3+2x^2+x+2}$ (iv) $\frac{5}{6x^2}$

2. (i) $\frac{x^2-1}{x}$ (ii) $\frac{x^3+x^2+4x+2}{x^2+2}$ (iii) $\frac{2-x}{x^2-x}$

(iv) $\frac{x^3+x^2+4}{3x^2}$ (v) $\frac{x^2+2}{x-4}$

3. (i) $\frac{x^5+x^4+3x^2+x-3}{x^5-x^3+2x^2-2}$ (ii) $\frac{x^4+3x^2-6x+10}{x^3-3x^2+x-3}$

4. (i) $\frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$ (ii) $\frac{x^2-15x+6}{2(x^3+3x^2-9x-27)}$

(iii) $\frac{1-x}{x+1}$ (iv) $\frac{-3x^3-x^2+2}{x^2-1}$

5. (i) $\frac{x^3+2x^2-16x+48}{x^2-7x+12}$ (ii) $\frac{-x^2+2x+4}{x+2}$

6. (i) $\frac{2}{x^2-6x+8}$ (ii) $\frac{-2}{x^3-15x^2+74x-120}$

7. $\frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$ 8. $\frac{3}{x-3}$ 9. $\frac{-x^5+2x^4+x^3+6x^2-6x+5}{x^2+x-6}$

10. $\dfrac{8}{x^8-1}$ 11. $\dfrac{4x^2+6x-14}{x^2+6x+8}$

12. (i) $\dfrac{8x}{1-x^2}$ (ii) 1 (iii) $\dfrac{1}{2(3-2x)}$

प्रश्नावली 3.4

1. (i) $\dfrac{5x^2+7x-6}{5x^2+32x+12}$ (ii) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-2x^2+2x-1}$ (iii) $\dfrac{x^3+3}{2x}$ (iv) $\dfrac{4(x-2)^2}{x^3+3x^2+4x+12}$

2. (i) $\dfrac{x-1}{x+1}$ (ii) $\dfrac{x-6}{x+1}$ (iii) $\dfrac{x-3}{x+2}$ (iv) $\dfrac{3x-2}{4x-3}$

3. (i) $\dfrac{7x^3+4x^2-33x-30}{x^2-2x-8}$ (ii) $\dfrac{-1}{1+x^2}$ (iii) 2

4. $\dfrac{2x^2-9x+7}{x^2+5x+4}$

5. (i) $\dfrac{1}{x+3}$ (ii) $\dfrac{x+6}{x+2}$ (iii) $\dfrac{2x^2+11x+5}{x^2-1}$ (iv) 1

6. $\dfrac{6x^4+9x^3+15x^2}{(x^2-1)^2}$ 7. $\dfrac{5x-11}{4x+8}$ 8. $\dfrac{x^4+3x^2+1}{x^3+x}$

9. (i) $\dfrac{x^3+x^2-2x+3}{x^2-3x}$ (ii) $\dfrac{x^3-x^2+6x-3}{x^2-3x}$ (iii) $\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-3x}$ (iv) $\dfrac{x^3+2x}{x^2-4x+3}$

प्रश्नावली 4.1

1. हाँ	2. हाँ	3. नहीं	4. हाँ
5. नहीं	6. हाँ	7. हाँ	8. नहीं
9. नहीं	10. हाँ	11. हाँ	12. नहीं
13. हाँ	14. नहीं	15. हाँ	16. हाँ
17. हाँ	18. हाँ	19. हाँ	20. नहीं

प्रश्नावली 4.2

1. $\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}$	2. $\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}$	3. $7, -3$	4. $1, -11$
5. $3, -6$	6. $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$	7. $\frac{b}{a}, -\frac{b}{a}$	8. $0, 3$
9. $\sqrt{6}, -\sqrt{6}$	10. $0, 2b$	11. $-\frac{1}{2}$	12. 4
13. $\frac{1}{2}$	14. 3	15. $-\sqrt{3}$	16. $2q$
17. $4, -2$	18. $-\frac{3}{2}, \frac{7}{3}$	19. $-6, 3$	20. $5, -2$
21. $\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}$	22. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$	23. $1, -\frac{2}{5}$	24. $-a, \frac{a}{2}$
25. $\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}$	26. $\frac{1}{5}, \frac{3}{2}$	27. $\frac{5}{4}, \frac{3}{2}$	28. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4},$
29. $2, \frac{5}{3}$	30. -2	31. $\frac{c}{b}, -\frac{b}{a}$	32. $5, \frac{5}{2}$
33. $-9, 7$	34. $2, -5$		

प्रश्नावली 4.3

1. 12	**2.** 16	**3.** $a^2 - 32$	**4.** -3
5. 32	**6.** $16 - 4b$	**7.** हाँ	**8.** हाँ
9. नहीं	**10.** हाँ	**11.** हाँ	**12.** नहीं
13. हाँ	**14.** नहीं	**15.** नहीं	**16.** हाँ
17. हाँ	**18.** नहीं	**19.** $2+\sqrt{5}, 2-\sqrt{5}$	**20.** $3+\sqrt{7}, 3-\sqrt{7}$

21. $-4+2\sqrt{3}, -4-2\sqrt{3}$ **22.** $-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}, -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}$

23. $\frac{1}{2}, -3$ **24.** $1, -\frac{1}{2}$ **25.** $\frac{-9+\sqrt{33}}{6}, \frac{-9-\sqrt{33}}{6}$

26. $\frac{1+\sqrt{11}}{5}, \frac{1-\sqrt{11}}{5}$ **27.** $\frac{-4+\sqrt{2}}{7}, \frac{-4-\sqrt{2}}{7}$

28. $\frac{3}{2}, -2$ **29.** $2, -4$ **30.** $3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}$

31. $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ **32.** $-\frac{3}{2}$ **33.** कोई वास्तविक मूल नहीं

34. $\frac{1}{3}\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ **35.** $\frac{13}{\sqrt{7}}, -\sqrt{7}$ **36.** $-2, \frac{-4a}{3}$

37. $\frac{-1+\sqrt{29}}{2}, \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ **38.** $2(1+\sqrt{3}), 2(1-\sqrt{3})$

39. $p \le 4$ **40.** $p \le 1\frac{1}{8}$ **41.** $p \le 1\frac{3}{5}$ **42.** $p \ge -4$

43. $p \ge 2$ या ≤ -2 **44.** $p \ge 4$ या ≤ -4

प्रश्नावली 4.4

1. 8, 4 **2.** 7, 5 **3.** 3, $\frac{1}{3}$ **4.** 13 सेमी, 15 सेमी

5. $\frac{3}{7}$ **6.** 6 वर्ष **7.** 26 **8.** 9, 11

9. 6, 8 **10.** 3, 5 **11.** 8, 9, 10 **12.** 10 सेमी, 8 सेमी, 6 सेमी

13. 8 मी, 15 मी, 17 मी **14.** 9, 6 अथवा 9, – 6

15. पिता : 36 वर्ष, पुत्र : 9 वर्ष **16.** 576

17. 20 मी × 5 मी अथवा 10 मी × 10 मी **18.** 3 सेमी, 9 सेमी

19. 8 सेमी, 5 सेमी

20. तेज चलने वाली रेलगाड़ी : 48 किमी / घं ; धीरे चलने वाली रेलगाड़ी : 32 किमी / घं

21. 25 किमी / घं **22.** 40 किमी / घं ; 50 किमी / घं **23.** 750 किमी / घं

24. 5 किमी / घं **25.** 3 किमी / घं **26.** 12 **27.** 20

प्रश्नावली 5.1

1. (i) नहीं (ii) हाँ ; $d = -4$ (iii) नहीं (iv) हाँ ; $d = -10$

(v) हाँ ; $d = 0$ (vi) हाँ ; $d = 90$ (vii) हाँ ; $d = 0.7$ (viii) हाँ ; $d = -200$

(ix) नहीं (x) हाँ ; $d = 1$ (xi) नहीं (xii) हाँ ; $d = 24$

2. (i) $d = 8$; $a_5 = 83$, $a_6 = 91$ (ii) $d = -8$; $a_5 = 43$, $a_6 = 35$

(iii) $d = 0.2$; $a_5 = 2.6$, $a_6 = 2.8$ (iv) $d = \frac{1}{4}$; $a_5 = 1$, $a_6 = \frac{5}{4}$

(v) $d = 17$; $a_5 = 187$, $a_6 = 204$

3. (i) 185 (ii) 26 (iii) 15 (iv) $\frac{19}{4}$

4. (i) 119 (ii) 24 (iii) $\frac{17}{12}$ **6.** 20 वाँ पद

7. (i) 40 (ii) 76 (iii) 100 (iv) 17

8. (i) – 50 (ii) 10 d

9. $a_n - a_k = (n - k)\ d$ (i) 37 (ii) 40 (iii) 5

10. 65 वाँ पद

11. (i) 5 (ii) 5 (iii) 5 (iv) 5

12. 111222333 13. – 142

14. (i) 242 (ii) 390 (iii) 3774

15. (i) 5050 (ii) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

16. (i) 10100 (ii) 40703 (iii) – 8930

17. (i) 7, 11, 15, ..., $3 + 4n$; 525
   (ii) 7, 9, 11, 13, ..., $5 + 2n$; 315
   (iii) 5, 4, 3, 2, 1, 0, – 1, ..., $6 - n$; – 30
   (iv) 4, – 1, – 6, – 11, ..., $9 - 5n$; – 465

18. $d = b$, $S_{20} = 20a + 210b$ 19. हाँ ; 2400 रु

प्रश्नावली 6.1

1. 20 %	2. 10 %	3. 16 %	4. 13.41 %
5. 16.78 %	6. 260 रु	7. 16 %	8. 520 रु
9. 4.69 %	10. 13.77 %	11. 73.06 रु	12. 15.38 %
13. 17.78 %	14. 920 रु	15. 12 %	16. 18.75 %
17. 9.41 %	18. 7.54 %		

प्रश्नावली 6.2

1. 4860 रु	2. 140608 रु	3. 92610 रु
4. 2700 रु, 664 रु	5. 6760 रु	6. 4096 रु

7. 10648 रु 8. 689210 रु, 99230 रु 9. 1111200 रु

10. 393660 रु, 166480 रु

प्रश्नावली 7.1

1. 3318 रु	2. 16296 रु	3. 52395 रु
4. 158393 रु	5. 6216 रु	6. कुछ नहीं
7. 1491 रु	8. 180600 रु	9. 15600 रु
10. 4033 रु	11. 5048 रु	12. 14291 रु
13. कुछ नहीं	14. 273 रु	

प्रश्नावली 8.1

1.(i) हाँ (ii) हाँ

2.(i) QC = 2.6 सेमी (ii) AQ = 2.65 सेमी

प्रश्नावली 8.2

1. (i) Δ ACB ~ Δ QRP (AA) (ii) Δ PQR ~ Δ DEF (SSS)

(iii) समरूप नहीं (iv) समरूप नहीं

(v) समरूप नहीं (vi) Δ DEF ~ Δ MNP (AA)

2. $\angle DEC = 65°$; $\angle DCE = 45°$; $\angle EAB = 45°$; $\angle AEB = 65°$; $\angle ABE = 70°$

12. 8 सेमी 17. 60 मी

प्रश्नावली 8.3

1. 11.2 2. 4 : 1 3. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 9. 1 : 4

प्रश्नावली 8.4

1. (i) 2. 13 मी 3. 12 मी 4. 31.62 मी

6. 13 मी

प्रश्नावली 8.5

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ **2.** 8.33 सेमी

9. AF = 1.67 सेमी, CE = 2.46 सेमी, BD = 4.4 सेमी

प्रश्नावली 9.1

11. नहीं, क्योंकि व्यास AB से छोटा है **15.** 13 सेमी

16. 9.6 सेमी **17.** (i) 2 सेमी (ii) 14 सेमी

प्रश्नावली 9.3

1. (i) 70° (ii) 55° (iii) 35°

(iv) 35° (v) 30°

2. $\angle A = 110°$, $\angle C = 70°$, $\angle D = 110°$

प्रश्नावली 10.1

2. 4 सेमी

6. दी हुई रेखा पर दिए हुए बिंदु से होकर लंब

9. दो रेखाओं के बीच के कोणों के समद्विभाजकों का युग्म

11. 13 सेमी, 15 सेमी **12.** 19 सेमी

प्रश्नावली 10.2

1. (i) दिए हुए वृत्त के संकेंद्रीय $r_1 + r$ त्रिज्या वाला एक वृत्त,

(ii) दिए हुए वृत्त के संकेंद्रीय $r_1 - r$ त्रिज्या वाला एक वृत्त,

जहाँ दिए गए वृत्त की त्रिज्या r_1 तथा दूसरे वृत्त की त्रिज्या r है।

प्रश्नावली 11.1

1. 3 सेमी (लगभग) **2.** 3.5 सेमी (लगभग) **3.** 1 सेमी

4. प्रत्येक 8 सेमी **6.** 6.5 सेमी **8.** 1.7 सेमी (लगभग)

प्रश्नावली 12.1

1. $\tan^2 A$ **4.** (i) -3 (ii) -4 (iii) 5 (iv) 7

5. (i) $1 - \sin\theta\cos\theta$ (ii) $\sin\theta$

प्रश्नावली 12.2

1. 1 **2.** (i) 1 (ii) 1 **4.** $\sin 15^\circ + \tan 15^\circ$

5. (i) 1 (ii) 1 **6.** 2 **7.** 1

18. 2 **19.** 24°

प्रश्नावली 13.1

1. 11.53 मी **2.** 2.59 मी **3.** 14.1 मी

4. 186 मी (लगभग) **5.** 45° **6.** 105.75 मी

7. 45° **8.** 150 मी **9.** 57.67 मी ; 86.5 मी , 28.83 मी

10. 30 मी **11.** 25.95 मी **12.** 36.5 मी

13. 16.56 मी **14.** 236.5 मी **15.** 38.93 मी

16. 109.5 मी **17.** 3.65 मी

18. 25 मी एक सिरे से, 43.25 मी

20. 9.56 मी **21.** 21.2 मी (लगभग) **22.** 140.73 मी

23. 1693.3 मी **24.** 17.3 मी, 40 मी **25.** 17.3 मी

26. 9 मिनट

प्रश्नावली 14.1

1. 48384 मी ^{3}
2. 12 सेमी, 864 सेमी ^{2}
3. (i) 1848 सेमी ^{2} (ii) 3080 सेमी ^{2} (iii) 12936 सेमी ^{3}
4. 8 सेमी
5. (i) 1232 सेमी ^{3} (ii) 704 सेमी ^{2}
6. 42 सेमी
7. (i) 310.46 सेमी ^{3} (ii) 221.76 सेमी ^{2}
8. 1437.33 सेमी ^{3}
9. (i) 19.404 लीटर (ii) 3253.25 सेमी ^{2}
10. 115.5 सेमी ^{2}

प्रश्नावली 14.2

1. 512
2. $6(19)^{\frac{1}{3}}$ सेमी
3. 36 मी
4. 10.8 % (लगभग)
5. 2.1 सेमी
6. 7 सेमी
7. $\frac{1}{2}(181)^{\frac{1}{3}}$ सेमी
8. 0.4 मी
9. 1.125 मी
10. 1408 सेमी ^{2}, 3850 सेमी ^{3}
11. $\frac{5}{6}$ सेमी
12. 0.5 सेमी
13. 54
14. $6 : \pi$
15. 179.67 सेमी ^{3}
16. $\frac{h}{3m^2}$
17. 9979.2 लीटर
18. 78.75 सेमी
19. 2.5 सेमी
20. 10.5 मी
21. 2 मी
22. 225000 मी ^{2}
23. 51.2 मिनट
24. 26.73 मिनट (लगभग)

प्रश्नावली 14.3

1. 6160 मी ^{3}
2. 55687.50 रु
3. 0.95 मी (लगभग)
4. 102.24 किग्रा
5. 8316 सेमी ^{3}
6. 500π मी ^{3}; 55000 रु
7. 735.43 मी ^{2}, 2112 मी ^{3}
8. $10\frac{10}{21}$ मी ^{3}

9. 56.15 मी ^{3}, $70\frac{7}{12}$ मी^{2}

10. $30\frac{6}{35}$ सेमी^{2}

11. 402.5 मी ^{3}, 250.5 मी ^{2}

12. $754\frac{2}{7}$ सेमी^{3} **13.** 1980 सेमी ^{3}

14. 1388.7 किग्रा (लगभग)

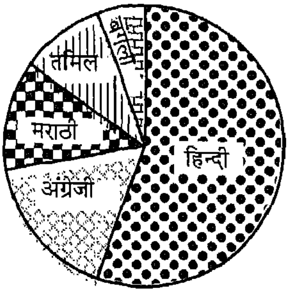
15. 48510 सेमी ^{3}, 5616.5 सेमी ^{2} (लगभग)

16. 20 सेमी

17. 1 : 2

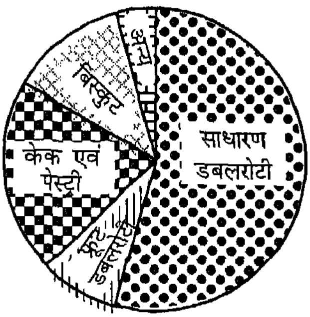
प्रश्नावली 15.1

1.



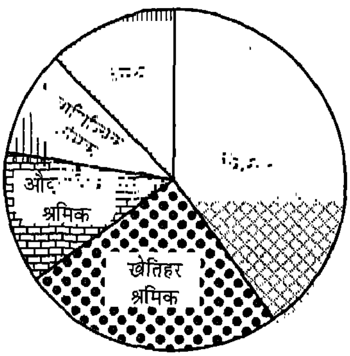
2. भोजन : 61.1%,
कपड़ा :13.9%,
आवास : 16.7%,
ईंधन : 5.5%,
अन्य : 2.8%

3.

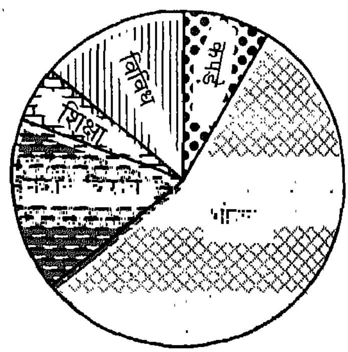


4. (i) शिवरमण,
(ii) 120 वोट
(iii) 40 वोट

5.

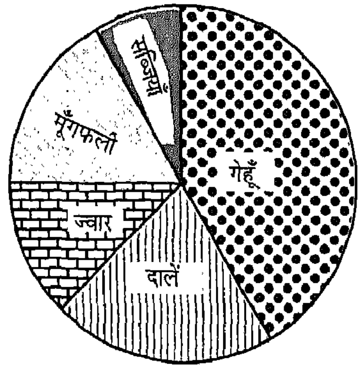


6.



7. (i) 72000 रु
(ii) 11000 रु
(iii) 32000 रु

8.



प्रश्नावली 15.2

1. 25.86 अंक **2.** 39.36 वर्ष **3.** 196.8

4. 48.41 अंक **5.** 166.3 (लगभग) **6.** 7

7. 31 वर्ष **8.** $f_1 = 28, f_2 = 24$

प्रश्नावली 15.3

1. $\frac{2}{3}$ **2.** (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{5}{12}$

3. (i) $\frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{52}$ (iii) $\frac{1}{26}$ **4.** 0.98

5. (i) $\frac{9}{17}$ (ii) $\frac{7}{17}$ (iii) $\frac{5}{17}$ (iv) $\frac{2}{17}$ **6.** 0.005

7. (i) $\frac{4}{13}$ (ii) $\frac{2}{13}$ **8.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{3}$

9. (i) $\frac{13}{49}$ (ii) $\frac{3}{49}$ (iii) $\frac{10}{49}$ (iv) $\frac{1}{49}$

10. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{25}$ (iii) $\frac{9}{100}$ (iv) $\frac{2}{25}$

11. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **12.** 0.7

13. (i) 24 (ii) [illegible] 6

15. (i) $\frac{x}{12}$ (ii) 3 **16.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{4}$

18. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0 और 1 (iv) $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 16.1

1. (i) पहला (ii) चौथा (iii) दूसरा
(iv) तीसरा (v) दूसरा (vi) चौथा

2 पंचभुज **3.** (i) दूसरा (ii) तीसरा (iii) पहला (iv) दूसरा

4. (i) समलंब (ii) समचतुर्भुज

प्रश्नावली 16.2

1. (i) 13 (ii) 5 (iii) $\sqrt{82}$ (iv) 13 **2.** हाँ

3. $\sqrt{2}\,a$ **4.** $\sqrt{2(a^2+b^2)}$ **5.** नहीं

6. हाँ **7.** हाँ **8.** हाँ

9. हाँ **10.** हाँ **11.** हाँ

12. (–2, 0) **13.** (0, –2) **14.** 1

प्रश्नावली 16.3

1. (11, 18) **2.** $\left(\frac{11}{7}, \frac{18}{7}\right)$ **3.** $\left(\frac{2}{11}, \frac{49}{11}\right)$

4. $\left(\frac{19}{7}, \frac{22}{7}\right)$ **5.** $\left(-\frac{71}{12}, \frac{29}{12}\right)$ **6.** 4 : 7

7. 59. $\frac{\sqrt{130}}{2}, \frac{\sqrt{130}}{2}, \sqrt{13}$

11. (– 3, 1.5), (– 2, 3), (– 1, 4.5) **12.** (1, 4)

13. (2, – 1) **14.** $\frac{10}{3}, \frac{7}{3}$